Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

01.06.2011

Funktionalanalysis
8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1 Es sei H ein Hilbertraum und $A, B \in L(H)$ mit $AB = BA$, $A = A^*$ und

$$B \geq 0 \;:\Longleftrightarrow\; B = B^*,\ \langle x, Bx\rangle \geq 0 \quad (x \in H).$$

Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $A^{2n}B^k = B^k A^{2n} \geq 0$ gilt.

Aufgabe 8.2 Im Folgenden nennen wir einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ lokalkonvex, wenn die konvexen, offenen Mengen eine Basis der Topologie bilden, d.h. zu jeder offenen Menge V und jedem $x \in V$ existiert eine offene, konvexe Menge U mit $x \in U \subset V$ (vgl. Aufgabe 2.1.(ii)). Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Normierte Räume, insbes. L^p-Räume für $1 \leq p \leq \infty$, induzieren lokalkonvexe Räume.

(ii) Für $0 < p < 1$ sei $\mathcal{L}^p([0,1], \mathbb{R})$ der Raum der messbaren Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\int_{[0,1]} |f(x)|^p dx < \infty$ und damit $L^p([0,1], \mathbb{R})$ definiert wie üblich.
Dann definiert $d(f, g) := \int_{[0,1]} |f(x) - g(x)|^p dx$ eine Metrik auf $L^p([0,1], \mathbb{R})$.

(iii) $(L^p([0,1], \mathbb{R}), d)$ induziert für $0 < p < 1$ einen nicht-lokalkonvexen Raum.

Hinweis: Sie dürfen in (ii) verwenden, dass $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ für $a, b \geq 0$ und $0 < p < 1$ gilt. Führen Sie in (iii) einen Widerspruchsbeweis, indem Sie verwenden, dass die offenen Kugeln bezgl. d Basis von $\mathcal{T}_d$ (vgl. Def. 1.10.b)) sind und zeigen, dass es in jeder Kugel Konvexkombinationen mit beliebigem Abstand zum Mittelpunkt gibt.

Aufgabe 8.3 Sei $0 < p < 1$ und $(L^p([0,1], \mathbb{R}), d)$ wie in Aufgabe 8.2 (iii).
Zeigen Sie $\big(L^p([0,1], \mathbb{R})\big)' = \{0\}$ mittels indirekter Beweisführung wie folgt:

(i) Falls es $\varphi \in \big(L^p([0,1], \mathbb{R})\big)'$ mit $\varphi \neq 0$ gibt, so existiert $f_0 \in L^p([0,1], \mathbb{R})$ mit $|\varphi(f_0)| \geq 1$.

(ii) Zu f_0 existieren $g_0, h_0 \in L^p([0,1], \mathbb{R})$ mit $f_0 = g_0 + h_0$,

$$\int_0^1 |g_0(x)|^p dx = \int_0^1 |h_0(x)|^p dx = \frac{1}{2} \int_0^1 |f_0(x)|^p dx$$

und (o.E.d.A.) $|\varphi(g_0)| \geq 1/2$. Hinweis: Verwenden Sie o.B. die Stetigkeit von $s \mapsto \int_0^s |f(x)|^p dx$.

(iii) Definiert man mit (ii) iterativ $f_n := 2g_{n-1}$, so gilt $d(f_n, 0) \to 0$ für $n \to \infty$.

(iv) Aus (iii) ergibt sich ein Widerspruch zu (i) und es gilt $\big(L^p([0,1], \mathbb{R})\big)' = \{0\}$.

Abgabetermin: Freitag 10. Juni 2011, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.