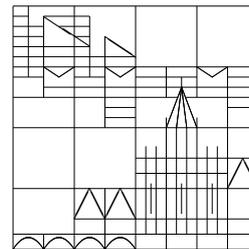


10.06.2011



Funktionalanalysis 9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1 Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$\phi(t) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie zunächst $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und konstruieren Sie damit anschließend eine Funktion $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \psi = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$.

Aufgabe 9.2 Für $m \in \mathbb{N}$ sei $P\left(\frac{d}{dx}\right) := \sum_{k=0}^m a_k \left(\frac{d}{dx}\right)^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ für $k = 1, \dots, m$ und $a_m = 1$. Außerdem sei $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dx}\right) w(x) &= 0, \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \\ w^{(k)}(0) &= 0 \text{ für } k = 0, \dots, m-2 \\ w^{(m-1)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Mit der Heaviside-Funktion $H := h_0$ aus Beispiel 5.8 gilt $P\left(\frac{d}{dx}\right)[wH] = \delta_0$.

Aufgabe 9.3 Es sei $G := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ die offene Kugel bzgl. $\|\cdot\|_2$ um den Ursprung mit Radius 1 und $u_\rho(x) := \|x\|_2^\rho$ für $x \in G$. Zeigen Sie:

- (i) Für $\rho > -2$ gilt $u_\rho \in L^1(G)$.
- (ii) Für $\rho > -1$ gilt $u_\rho \in W^{1,1}(G)$.

HINWEIS: Transformieren Sie in (i) auf Polarkoordinaten und behandeln Sie den Pol von u_ρ in (ii) mit dem Satz von Gauß in Verbindung mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz.