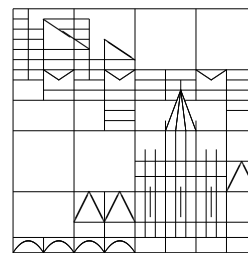


17.06.2011



Funktionalanalysis 10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Zeigen Sie, dass

$$M := \{f \in C([0, 1]); \exists x \in [0, 1) : \text{die rechteitige Ableitung von } f \text{ an der Stelle } x \text{ existiert}\}$$

in $C([0, 1])$ von erster Kategorie (mager) ist.

Aufgabe 10.2 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $P(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ so, dass

$$W := \{u \in L^2(\Omega); [u](P(\partial)\varphi) = 0 \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega))\} \subset C^1(\Omega)$$

gilt. Sei außerdem $\Omega' \subset \Omega$ offen mit $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Zeigen Sie:

- (i) W ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega)$.
- (ii) $T_k : W \rightarrow L^2(\Omega')$; $T_k u := \partial_k u$ ist wohldefiniert und abgeschlossen.
- (iii) Es existiert $C > 0$ so, dass $\sum_{k=1}^n \int_{\Omega'} |\partial_k u(x)|^2 dx \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ für alle $u \in W$ gilt.

Aufgabe 10.3 Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und G, H abgeschlossene Unterräume mit $G \cap H = \{0\}$. Zeigen Sie, dass $G + H := \{x + y; x \in G, y \in H\}$ genau dann abgeschlossen ist, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $\|x\| \leq C \|x + y\|$ für alle $x \in G$ und $y \in H$.