Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

17.06.2011

Funktionalanalysis
10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Zeigen Sie, dass

$$M := \{f \in C([0,1]);\ \exists x \in [0,1):\ \text{die rechtseitige Ableitung von } f \text{ an der Stelle } x \text{ existiert}\}$$

in $C([0,1])$ von erster Kategorie (mager) ist.

Aufgabe 10.2 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $P(\partial) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ so, dass

$$W := \big\{u \in L^2(\Omega);\ [u]\big(P(\partial)\varphi\big) = 0 \quad \big(\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\big)\big\} \subset C^1(\Omega)$$

gilt. Sei außerdem $\Omega' \subset \Omega$ offen mit $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Zeigen Sie:

(i) W ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega)$.

(ii) $T_k : W \to L^2(\Omega');\ T_k u := \partial_k u$ ist wohldefiniert und abgeschlossen.

(iii) Es existiert $C > 0$ so, dass $\sum_{k=1}^n \int_{\Omega'} |\partial_k u(x)|^2 dx \leq C\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ für alle $u \in W$ gilt.

Aufgabe 10.3 Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und G, H abgeschlossene Unterräume mit $G \cap H = \{0\}$. Zeigen Sie, dass $G + H := \{x + y;\ x \in G,\ y \in H\}$ genau dann abgeschlossen ist, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $\|x\| \leq C\|x + y\|$ für alle $x \in G$ und $y \in H$.

Abgabetermin: Freitag 24. Juni 2011, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.