Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

24.06.2011

Funktionalanalysis
11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Es sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $S, T \in L(H)$. Zeigen Sie:

(i) Gilt $\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$ für alle $x \in H$ so gilt $S = T$.

(ii) T ist genau dann normal, wenn für alle $x \in H$ schon $\|Tx\| = \|T^*x\|$ gilt.

(iii) Ist T normal, so gilt $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Hinweis: Zeigen Sie in (i) $\langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle$ für alle $x, y \in H$.

Aufgabe 11.2 Es sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(H)$. Zeigen Sie:

(i) Gilt $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in H$, so folgt $T^*T = I$.

(ii) Ist T unitär, so gilt $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in H$.

(iii) Ist T unitär, so gilt $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$.

(iv) Ist T surjektiv, so gelten für die Aussagen in (ii) und (iii) auch die Umkehrungen.

Aufgabe 11.3 Es sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbstadjungiert mit $\sigma(T) \subset [m, M]$.

(i) Führen Sie den Beweis von Satz 8.7 d) (neues Skript) aus.

(ii) Zeigen Sie: Sind $f\colon [m, M] \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.

(iii) Die Potenzreihe $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$ mit Koeffizienten $\alpha_n \in \mathbb{C}$ habe positiven Konvergenzradius $R > \max\{|m|, |M|\}$.
Zeigen Sie, dass $f(T) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T^n$ als Banachraum-wertige Reihe wohldefiniert ist und mit der Definition $f(T) := \Phi(f)$ über den stetigen Funktionalkalkül Φ von T übereinstimmt.

Abgabetermin: Freitag 01. Juli 2011, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.