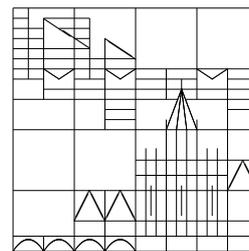


24.06.2011



## Funktionalanalysis 11. Übungsblatt

**Aufgabe 11.1** Es sei  $H$  ein  $\mathbb{C}$ -Hilbertraum und  $S, T \in L(H)$ . Zeigen Sie:

- (i) Gilt  $\langle Sx, x \rangle = \langle Tx, x \rangle$  für alle  $x \in H$  so gilt  $S = T$ .
- (ii)  $T$  ist genau dann normal, wenn für alle  $x \in H$  schon  $\|Tx\| = \|T^*x\|$  gilt.
- (iii) Ist  $T$  normal, so gilt  $\sigma_r(T) = \emptyset$ .

HINWEIS: Zeigen Sie in (i)  $\langle Sx, y \rangle = \langle Tx, y \rangle$  für alle  $x, y \in H$ .

**Aufgabe 11.2** Es sei  $H$  ein  $\mathbb{C}$ -Hilbertraum und  $T \in L(H)$ . Zeigen Sie:

- (i) Gilt  $\|Tx\| = \|x\|$  für alle  $x \in H$ , so folgt  $T^*T = I$ .
- (ii) Ist  $T$  unitär, so gilt  $\|Tx\| = \|x\|$  für alle  $x \in H$ .
- (iii) Ist  $T$  unitär, so gilt  $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$  für alle  $x, y \in H$ .
- (iv) Ist  $T$  surjektiv, so gelten für die Aussagen in (ii) und (iii) auch die Umkehrungen.

**Aufgabe 11.3** Es sei  $H$  ein  $\mathbb{C}$ -Hilbertraum und  $T \in L(H)$  selbstadjungiert mit  $\sigma(T) \subset [m, M]$ .

- (i) Führen Sie den Beweis von Satz 8.7 d) (neues Skript) aus.
- (ii) Zeigen Sie: Sind  $f: [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so gilt  $(g \circ f)(T) = g(f(T))$ .
- (iii) Die Potenzreihe  $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$  mit Koeffizienten  $\alpha_n \in \mathbb{C}$  habe positiven Konvergenzradius  $R > \max\{|m|, |M|\}$ .  
Zeigen Sie, dass  $f(T) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T^n$  als Banachraum-wertige Reihe wohldefiniert ist und mit der Definition  $f(T) := \Phi(f)$  über den stetigen Funktionalkalkül  $\Phi$  von  $T$  übereinstimmt.