Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

01.07.2011

Funktionalanalysis
12. Übungsblatt

Definition 12.1 *Wir definieren die Schwierigkeitsklassen für Übungsaufgaben nach Dobrowolski gemäß : (1) trivial, (2) heminormal, (3) normal, (4) doktoral, (5) suizidal.*

Aufgabe 12.1 (12 Punkte) Bearbeiten Sie erneut Teilaufgabe 4.3.(iv), die seinerzeit der Schwierigkeitsklasse (4)-(5) entsprach. Zeigen Sie genauer gesagt für

$$T\colon L^2([0,3]) \to L^2([0,3]), f \mapsto \Big[x \mapsto \int_0^x f(\xi)d\xi\Big]$$

mit $L^2([0,3]) = L^2([0,3];\mathbb{C})$, dass $\|T\|_{L(L^2([0,3]))} = \frac{6}{\pi}$ gilt.

Betrachten Sie $V\colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), f \mapsto \big[x \mapsto \int_0^x f(\xi)d\xi\big]$ und gehen vor wie folgt:

(i) **(2P)** Begründen Sie die Existenz von $V^* \in L(L^2([0,1]))$ und zeigen Sie

$$V^*\colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), f \mapsto \Big[x \mapsto \int_x^1 f(\xi)d\xi\Big].$$

(ii) **(2P)** Begründen Sie, dass V^*V selbstadjungiert ist und zeigen Sie

$$\big(V^*Vf\big)(x) = \int_0^1 f(\xi)d\xi - x\int_0^x f(\xi)d\xi - \int_x^1 \xi f(\xi)d\xi \quad \text{(für fast alle } x \in [0,1]).$$

(iii) **(1P)** Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}_0$ die Zahlen $\lambda_k := (k+\frac{1}{2})^{-2}\pi^{-2}$ Eigenwerte von V^*V mit zugehörigen Eigenfunktionen $c_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(e^{i\pi(k+\frac{1}{2})x} + e^{-i\pi(k+\frac{1}{2})x}\big)$ sind.

(iv) **(2P)** Zeigen Sie, dass $U : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\big(f(x)e^{i\pi\frac{x}{2}} + f(1-x)e^{-i\pi\frac{x}{2}}\big)$ einen unitären Operator definiert.

(v) **(2P)** Folgern Sie, dass die c_k für $k \in \mathbb{N}_0$ eine Basis des $L^2([0,1])$ definieren.
Hinweis: Verwenden Sie (iv) und dass $f_n(x) := e^{2\pi inx}$ für $n \in \mathbb{Z}$ eine Basis definieren (vgl. Bsp. 2.44 a)).

(vi) **(1P)** Verwenden Sie (o.B.) $\sigma(V^*V) = \sigma_p(V^*V) \cup \{0\}$ um $\|V^*V\| = \lambda_0$ zu folgern.

(vii) **(1P)** Folgern Sie, dass $\|V\|_{L(L^2([0,1]))} = \frac{2}{\pi}$ gilt.

(viii) **(1P)** Folgern Sie, dass $\|T\|_{L(L^2([0,3]))} = \frac{6}{\pi}$ gilt.

Anmerkung: Alle Teilaufgaben können mit den gegebenen Informationen unabhängig bearbeitet werden.

Abgabetermin: Freitag 08. Juli 2011, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.