Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

21.10.2011

Theorie partieller Differentialgleichungen
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)

(i) Sei $c > 0$ und $F \in C^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $u_\pm(x,t) := F(x \pm ct)$ jeweils die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \quad \big((x,t) \in \mathbb{R}^2\big) \tag{1}$$

lösen.

(ii) Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung (1) mit

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(iii) Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung (1) mit

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = -2xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 1.2 (4 Punkte) Wir betrachten ein Stromkabel, das im Untergrund geradlinig verlegt wurde und bei dem wegen schlechter Isolierung über die gesamte Länge Verluste auftreten.

Beschreibt die x-Achse die Gerade entlang derer das Kabel verlegt ist, t die Zeit, $V(x,t)$ die Spannung und $I(x,t)$ die Stromstärke am Punkt x zur Zeit t, so bestehen die Verhältnisse

$$V_x = -LI_t - RI \qquad \text{und} \qquad I_x = -CV_t - GV,$$

wobei L die Induktivität, R den Widerstand, C die Kapazität und G den Verlust ins Erdreich beschreiben.

Zeigen Sie: Gilt $V, I \in C^2(\mathbb{R}^2)$, so erfüllen V und I jeweils die *Telegraphengleichung*

$$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + LG)u_t + RGu.$$

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie: Ist $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ Lösung von

$$u_x(x,y) + u_y(x,y) = 0 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \tag{2}$$

so ist u für jedes $\rho \in \mathbb{R}$ auf der Menge $C_\rho := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x - y = \rho\}$ konstant.

Geben Sie alle Lösungen von (2) an.

(ii) Diskutieren Sie jeweils Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ der Gleichung (2) für die drei Fälle, dass mit $f \in C^1(\mathbb{R})$

$$u(t,0) = f(t), \quad u(0,t) = f(t), \quad \text{oder} \quad u(t+\rho,t) = f(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

vorgegeben ist.

(iii) Sei $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ gegeben. Bestimmen Sie alle Lösungen $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ der Gleichung

$$u_x(x,y) + u_y(x,y) = h(x,y) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Aufgabe 1.4 (4 Punkte) Wir betrachten eine Saite, die entlang der x-Achse zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist. Die zugehörige Schwingungsgleichung ist durch

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \quad \big((x,t) \in (0,L) \times (0,\infty)\big) \tag{3}$$

gegeben, wobei $u(x,t)$ die Auslenkung der Saite aus der x-Achse am Punkt x zur Zeit t bezeichnet. Die Saite sei gemäß eines halben Sinusbogens ausgelenkt und werde zu Beginn der Beobachtung, also zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Dies bedeutet gerade

$$u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{L} \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = 0 \qquad \text{für } x \in [0,L].$$

Nützen Sie den Separationsansatz um das zugehörige Anfangs-Randwert-Problem für u zu lösen.

Abgabetermin: Freitag 28. Oktober 2011, vor 10:00 Uhr im Briefkasten bei F411.