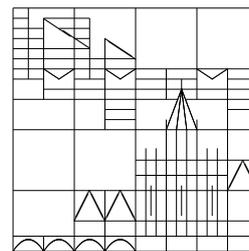


21.10.2011



Theorie partieller Differentialgleichungen 1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)

- (i) Sei $c > 0$ und $F \in C^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $u_{\pm}(x, t) := F(x \pm ct)$ jeweils die partielle Differentialgleichung

$$(1) \quad u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

lösen.

- (ii) Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung (1) mit

$$u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{und} \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- (iii) Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung (1) mit

$$u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{und} \quad u_t(x, 0) = -2xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 1.2 (4 Punkte) Wir betrachten ein Stromkabel, das im Untergrund geradlinig verlegt wurde und bei dem wegen schlechter Isolierung über die gesamte Länge Verluste auftreten.

Beschreibt die x -Achse die Gerade entlang derer das Kabel verlegt ist, t die Zeit, $V(x, t)$ die Spannung und $I(x, t)$ die Stromstärke am Punkt x zur Zeit t , so bestehen die Verhältnisse

$$V_x = -LI_t - RI \quad \text{und} \quad I_x = -CV_t - GV,$$

wobei L die Induktivität, R den Widerstand, C die Kapazität und G den Verlust ins Erdreich beschreiben.

Zeigen Sie: Gilt $V, I \in C^2(\mathbb{R}^2)$, so erfüllen V und I jeweils die *Telegraphengleichung*

$$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + LG)u_t + RGu.$$

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie: Ist $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ Lösung von

$$(2) \quad u_x(x, y) + u_y(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

so ist u für jedes $\rho \in \mathbb{R}$ auf der Menge $C_\rho := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = \rho\}$ konstant.

Geben Sie alle Lösungen von (2) an.

(ii) Diskutieren Sie jeweils Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ der Gleichung (2) für die drei Fälle, dass mit $f \in C^1(\mathbb{R})$

$$u(t, 0) = f(t), \quad u(0, t) = f(t), \quad \text{oder} \quad u(t + \rho, t) = f(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

vorgegeben ist.

(iii) Sei $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ gegeben. Bestimmen Sie alle Lösungen $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ der Gleichung

$$u_x(x, y) + u_y(x, y) = h(x, y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Aufgabe 1.4 (4 Punkte) Wir betrachten eine Saite, die entlang der x -Achse zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist. Die zugehörige Schwingungsgleichung ist durch

$$(3) \quad u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, L) \times (0, \infty))$$

gegeben, wobei $u(x, t)$ die Auslenkung der Saite aus der x -Achse am Punkt x zur Zeit t bezeichnet. Die Saite sei gemäß eines halben Sinusbogens ausgelenkt und werde zu Beginn der Beobachtung, also zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Dies bedeutet gerade

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{L} \quad \text{und} \quad u_t(x, 0) = 0 \quad \text{für } x \in [0, L].$$

Nützen Sie den Separationsansatz um das zugehörige Anfangs-Randwert-Problem für u zu lösen.