Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

04.11.2011

Theorie partieller Differentialgleichungen
3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\alpha \in \mathbb{N}^n$ durch $\alpha := (1, \dots, 1)$ gegeben. Bestimmen Sie die Grundlösung zum Differentialoperator $L := (-1)^n \partial^\alpha = (-1)^n \partial_1 \dots \partial_n$.
Hinweis: Die Grundlösung ist durch eine reguläre Distribution gegeben.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte) Sei $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x,t) := \frac{1}{2}$ für $t > |x|$ und $g(x,t) := 0$ sonst. Zeigen Sie, dass T_g Grundlösung zu $L(\partial_t, \partial_x) := \partial_t^2 - \partial_x^2$ ist.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte) a) Es sei $\Omega := (0,1)^2$. Es sei vorausgesetzt, dass zu beliebigem $f \in C_0^\infty(\Omega)$ genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ der Gleichung $\Delta u = f$ existiert mit

$$u(x_1, 0) = u(x_1, 1) = u(0, x_2) = u(1, x_2) = 0 \quad (x \in \Omega).$$

Zeigen Sie, dass dann in $\Omega_a := (0,a)^2$, $a > 0$, zu beliebigem $g \in C_0^\infty(\Omega_a)$ genau eine Lösung $v \in C^2(\Omega_a) \cap C^1(\overline{\Omega_a})$ der Gleichung $\Delta v = g$ existiert mit

$$v(x_1, 0) = v(x_1, a) = v(0, x_2) = v(a, x_2) = 0 \quad (x \in \Omega_a).$$

b) Unter der zusätzlichen Bedingung $\int_\Omega f(x)dx = 0$ sei nun für periodische Randbedingungen

$$u(x_1,0) = u(x_1,1),\ \partial_2 u(x_1,0) = \partial_2 u(x_1,1),\ u(0,x_2) = u(1,x_2),\ \partial_1 u(0,x_2) = \partial_1 u(1,x_2)$$

die eindeutige Lösbarkeit gegeben. Beweisen Sie das Analogon zu a) für diesen Fall.

Aufgabe 3.4 (4 Punkte) Es sei in $\Omega := (0,1)^2$ die Gleichung $\Delta u = f$ betrachtet und es sei vorausgesetzt, dass zu beliebigem $f \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\int_\Omega f(x)dx = 0$ genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ dieser Gleichung existiert, die die periodischen Randbedingungen

$$u(x_1,0) = u(x_1,1), \quad \partial_2 u(x_1,0) = \partial_2 u(x_1,1), \quad u(0,x_2) = u(1,x_2), \quad \partial_1 u(0,x_2) = \partial_1 u(1,x_2)$$

für $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ erfüllt. Konstruieren Sie damit zu beliebigem $g \in C_0^\infty(\Omega)$ eine Lösung $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ der Gleichung $\Delta v = g$, die die Dirichlet-Bedingungen

$$v(x_1,0) = v(x_1,1) = v(0,x_2) = v(1,x_2) = 0$$

für $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ erfüllt.
Hinweis: Aufgabe 3.3 mit $a = 2$ (oder $a = \frac{1}{2}$), ungerade Fortsetzungen der Funktion g und Symmetrieargumente.

Abgabetermin: Freitag 11. November 2011, vor 10:00 Uhr im Briefkasten bei F411.