Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

11.11.2011

Theorie partieller Differentialgleichungen
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 (4 Punkte) Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und $u, v \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$. Es gelte

$$\Delta u = f,\ u|_{\partial G} = \psi \quad \text{und} \quad \Delta v = g,\ v|_{\partial G} = \varphi.$$

Im Folgenden ist $\geq$ und $\leq$ stets punktweise zu verstehen. Zeigen Sie:

(i) Gilt $f \geq g$ in G und $\psi \leq \varphi$ auf ∂G, so gilt $u \leq v$ in $\overline{G}$.

(ii) Gilt $f = g$, so folgt $\max_{x \in \overline{G}} |u(x) - v(x)| \leq \max_{x \in \partial G} |\psi(x) - \varphi(x)|$.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, für das der Gaußsche Integralsatz gilt. Sei $u \in C^2(\overline{G})$ so, dass

$$\int_G \|\nabla u(x)\|^2 dx = \min \left\{ \int_G \|\nabla v(x)\|^2 dx;\ v \in C^1(\overline{G}) \text{ mit } v|_{\partial G} = u|_{\partial G} \right\}$$

gilt. Zeigen Sie, dass dann schon $\Delta u = 0$ im Sinne von Distributionen gilt.
Hinweis: Betrachten Sie mit beliebigem $\varphi \in C_0^\infty(G)$ die Funktion $g(t) := \int_G \|\nabla(u + t\varphi)\|^2 dx$.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte) Es sei $0 < T < \infty$ und $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. Leiten Sie zur inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - u_{xx} = f|_{(0,T)\times\mathbb{R}} \quad \text{in } (0,T) \times \mathbb{R},\ u|_{t=0} = 0$$

mittels Fourier-Transformation bzgl. x den Lösungskandidaten

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(\tau, y) \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{4(t-\tau)}(x-y)^2} dy d\tau$$

her. Sie dürfen dabei $\mathcal{F}k_{(t)}(\xi) = e^{-\xi^2 t}$ für $k_{(t)}(x) := (2t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4t}x^2}$ mit $t > 0$ verwenden.

Welche (reguläre) Distribution kommt damit als Grundlösung für den vorliegenden Differentialoperator $L(\partial_t, \partial_x) := \partial_t - \partial_{xx}$ in Frage? Begründen Sie.
Hinweis: Variation-der-Konstanten-Formel im Fourier-Bild und Lemma 4.7.

Aufgabe 4.4 (4 Punkte) Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$
\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta u & = & 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} & = & u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \tag{1}
$$

wobei im Gegensatz zu $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$ wie in Satz 4.11 nun $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben sei.

(a) Zeigen Sie, dass für eine Fourier-transformierbare Lösung u von (1)

$$
u(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \Delta u(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad (t > 0).
$$

gilt. Ist diese Lösung eindeutig? Begründen Sie.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$
U : [0,\infty) \to L^2(\mathbb{R}^n), \quad t \mapsto u(t,\cdot)
$$

stetig ist.

Hinweis: Arbeiten Sie mit dem Fourier-Bild der Funktionen und verwenden Sie den Satz von Plancherel.

Abgabetermin: Freitag 18. November 2011, vor 10:00 Uhr im Briefkasten bei F411.