Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

18.11.2011

Theorie partieller Differentialgleichungen
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Lösung u der homogenen eindimensionalen Wellengleichung aus Satz 5.2 der Vorlesung folgende stetige Abhängigkeit von den Daten u_0 und u_1 gegeben ist:
Zu jedem $T > 0$ existiert eine Konstante $C(T) > 0$ so, dass für Lösungen $u, v \in C^2(\mathbb{R} \times [-T, T])$ der Anfangswertprobleme

$$(1) \qquad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),$$
$$(2) \qquad v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, \qquad v(x,0) = v_0(x),\ v_t(x,0) = v_1(x)$$

mit $\|u_0 - v_0\|_\infty < \delta$ und $\|u_1 - v_1\|_\infty < \delta$ schon

$$\|u - v\|_{T,\infty} := \sup\{|u(x,t) - v(x,t)|;\ (x,t) \in \mathbb{R} \times [-T, T]\} < C(T)\delta$$

gilt.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $L = L(\partial_t, \partial_x)$ ein Differentialoperator zweiter Ordnung in den $n+1$ Variablen $x_1, \ldots, x_n, t$ mit (konstanten) Koeffizienten $a_{\alpha,k}$ der Gestalt

$$L(\partial_x, \partial_t) = \sum_{|\alpha|+k \le 2,\ 0 \le k < 2} a_{\alpha,k} \partial_x^\alpha \partial_t^k.$$

Unter passenden Voraussetzungen an f betrachten wir die inhomogene Gleichung

$$(3) \qquad u_{tt}(x,t) + L(\partial_x, \partial_t) u(x,t) = f(x,t) \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty))$$

und gehen davon aus, dass für beliebiges $\sigma \ge 0$ das Anfangswertproblem

$$w_{tt}(x,t) + L(\partial_x, \partial_t) w(x,t) = 0, \quad w(x,\sigma) = 0,\ w_t(x,\sigma) = f(x,\sigma)$$

eine auf $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ definierte Lösung $w = w_\sigma$ hat. Wir nehmen weiter an, dass diese ausreichend gutartig vom Parameter σ abhängt und schreiben $w_\sigma(x,t) = w(x,t,\sigma)$.
Zeigen Sie, dass unter passenden Voraussetzungen an f durch

$$u(x,t) := \int_0^t w(x,t,\sigma) d\sigma$$

eine partikuläre Lösung von (3) gegeben ist.

Aufgabe 5.3 (4 Punkte) Nützen Sie Aufgabe 5.2 um ausgehend von Satz 5.2 aus der Vorlesung zu $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ die partikuläre Lösung

$$u(x,t) := \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{-c\tau}^{c\tau} f(x-\eta, t-\tau) d\eta d\tau$$

der inhomogenen eindimensionalen Wellengleichung

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \tag{4}$$

herzuleiten.

Aufgabe 5.4 (4 Punkte) Nützen Sie die d'Alembertsche Formel aus Satz 5.2 um das Anfangswertproblem

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^4), \qquad u(x,0) = 0, \; u_t(x,0) = \|x\|^2 \; (x \in \mathbb{R}^3) \tag{5}$$

zu lösen.

HINWEIS: Verwenden Sie den Ansatz $u(x,t) := v(\|x\|, t)$.

Abgabetermin: Freitag 25. November 2011, vor 10:00 Uhr im Briefkasten bei F411.