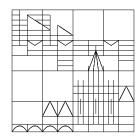
Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik PROF. DR. ROBERT DENK TOBIAS NAU

18.11.2011



## Theorie partieller Differentialgleichungen 5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Lösung u der homogenen eindimensionalen Wellengleichung aus Satz 5.2 der Vorlesung folgende stetige Abhängigkeit von den Daten  $u_0$  und  $u_1$  gegeben ist:

Zu jedem T>0 existiert eine Konstante C(T)>0 so, dass für Lösungen  $u,v\in C^2(\mathbb{R}\times[-T,T])$  der Anfangswertprobleme

(1) 
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x),$$

(2) 
$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0,$$
  $v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x)$ 

mit  $||u_0 - v_0||_{\infty} < \delta$  und  $||u_1 - v_1||_{\infty} < \delta$  schon

$$||u - v||_{T,\infty} := \sup\{|u(x,t) - v(x,t)|; (x,t) \in \mathbb{R} \times [-T,T]\} < C(T)\delta$$

gilt.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte) Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $L = L(\partial_t, \partial_x)$  ein Differentialoperator zweiter Ordnung in den n+1 Variablen  $x_1, \ldots, x_n, t$  mit (konstanten) Koeffizienten  $a_{\alpha,k}$  der Gestalt

$$L(\partial_x, \partial_t) = \sum_{|\alpha|+k \le 2, \ 0 \le k \le 2} a_{\alpha,k} \partial_x^{\alpha} \partial_t^k.$$

Unter passenden Voraussetzungen an f betrachten wir die inhomogene Gleichung

(3) 
$$u_{tt}(x,t) + L(\partial_x, \partial_t)u(x,t) = f(x,t) \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty))$$

und gehen davon aus, dass für beliebiges  $\sigma \geq 0$  das Anfangswertproblem

$$w_{tt}(x,t) + L(\partial_x, \partial_t)w(x,t) = 0, \quad w(x,\sigma) = 0, \quad w_t(x,\sigma) = f(x,\sigma)$$

eine auf  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$  definierte Lösung  $w = w_{\sigma}$  hat. Wir nehmen weiter an, dass diese ausreichend gutartig vom Parameter  $\sigma$  abhängt und schreiben  $w_{\sigma}(x,t) = w(x,t,\sigma)$ . Zeigen Sie, dass unter passenden Voraussetzungen an f durch

$$u(x,t) := \int_0^t w(x,t,\sigma)d\sigma$$

eine partikuläre Lösung von (3) gegeben ist.

**Aufgabe 5.3** (4 Punkte) Nützen Sie Aufgabe 5.2 um ausgehend von Satz 5.2 aus der Vorlesung zu  $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$  die partikuläre Lösung

$$u(x,t) := \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{-c\tau}^{c\tau} f(x-\eta, t-\tau) d\eta d\tau$$

der inhomogenen eindimensionalen Wellengleichung

(4) 
$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty))$$

herzuleiten.

**Aufgabe 5.4** (4 Punkte) Nützen Sie die d'Alembertsche Formel aus Satz 5.2 um das Anfangswertproblem

(5) 
$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^4), \qquad u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = ||x||^2 \ (x \in \mathbb{R}^3)$$

zu lösen.

HINWEIS: Verwenden Sie den Ansatz u(x,t) := v(||x||, t).

Abgabetermin: Freitag 25. November 2011, vor 10:00 Uhr im Briefkasten bei F411.