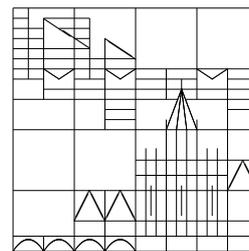


25.11.2011



## Theorie partieller Differentialgleichungen 6. Übungsblatt

**Aufgabe 6.1 (4 Punkte)** Zeigen Sie, dass jede Lösung  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  von  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  durch die Variablentransformation

$$\xi := \frac{1}{2c}(x + ct), \quad \tau := -\frac{1}{2c}(x - ct)$$

in eine Lösung  $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$  von  $v_{\tau\xi} = 0$  übergeht und umgekehrt.

**Aufgabe 6.2 (4 Punkte)** Zeigen Sie, dass eine Funktion  $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$  genau dann Lösung von  $v_{xy} = 0$  ist, wenn für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und für alle  $h > 0, k > 0$

$$v(x, y) + v(x + h, y + k) = v(x + h, y) + v(x, y + k)$$

gilt.

Übertragen Sie diese Aussage mittels Aufgabe 6.1 anschließend auf die Gleichung  $u_{tt} = u_{xx}$ .

**Aufgabe 6.3 (4 Punkte)** Seien  $0 < T, L < \infty$  und seien  $\kappa \in C^1([0, L])$ ,  $\rho \in C([0, L])$  mit  $\kappa(x) > 0$  und  $\rho(x) > 0$  für alle  $x \in [0, L]$ . Zeigen Sie mithilfe des Ausdrucks

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L \kappa(x) u_x(x, t)^2 + \rho(x) u_t(x, t)^2 dx,$$

dass die Nullfunktion die einzige Lösung  $u \in C^2([0, L] \times [0, T])$  des Anfangs-Randwert-Problems

$$\begin{aligned} \rho(x) u_{tt}(x, t) &= \partial_x(\kappa(x) u_x(x, t)) \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0 \quad (x \in [0, L]), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \quad (t \in [0, T]) \end{aligned}$$

ist.

HINWEIS: Zeigen Sie zunächst  $E(t) = 0$  für  $t \in [0, T]$ .

**Aufgabe 6.4 (4 Punkte)** Es sei  $u \in C^2((0, 1) \times (0, \infty)) \cap C^1([0, 1] \times [0, \infty))$  Lösung des Problems

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) & (x \in [0, 1]), \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \mu(t) & (t \geq 0), \end{cases}$$

wobei zwischen  $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $\psi \in C^1(\mathbb{R})$  und  $\mu$  folgender Zusammenhang bestehe:

$$\mu(t) = - \int_t^2 \Phi(s) ds \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2 \quad \text{und} \quad \mu(t) = 0 \quad \text{für } t \geq 2$$

mit

$$\Phi(s) := \begin{cases} \frac{1}{2}(\psi(1-s) - \varphi'(1-s)), & 0 \leq s \leq 1, \\ -\frac{1}{2}(\psi(s-1) + \varphi'(s-1)), & 1 \leq s \leq 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann  $u(x, t) = u_t(x, t) = 0$  für  $x \in [0, 1]$  und  $t \geq 2$  gilt.

Vergleichen Sie (1) mit Satz 5.3 bzw. Problem (5-3) aus der Vorlesung und geben Sie eine physikalische Interpretation der Problemstellung (1).

HINWEIS: Verwenden Sie Aufgabe 6.2.