Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

25.11.2011

Theorie partieller Differentialgleichungen
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass jede Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ von $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ durch die Variablentransformation

$$\xi := \frac{1}{2c}(x + ct), \quad \tau := -\frac{1}{2c}(x - ct)$$

in eine Lösung $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ von $v_{\tau\xi} = 0$ übergeht und umgekehrt.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass eine Funktion $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ genau dann Lösung von $v_{xy} = 0$ ist, wenn für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und für alle $h > 0$, $k > 0$

$$v(x, y) + v(x + h, y + k) = v(x + h, y) + v(x, y + k)$$

gilt.
Übertragen Sie diese Aussage mittels Aufgabe 6.1 anschließend auf die Gleichung $u_{tt} = u_{xx}$.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte) Seien $0 < T, L < \infty$ und seien $\kappa \in C^1([0, L])$, $\rho \in C([0, L])$ mit $\kappa(x) > 0$ und $\rho(x) > 0$ für alle $x \in [0, L]$. Zeigen Sie mithilfe des Ausdrucks

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L \kappa(x) u_x(x, t)^2 + \rho(x) u_t(x, t)^2 dx,$$

dass die Nullfunktion die einzige Lösung $u \in C^2([0, L] \times [0, T])$ des Anfangs-Randwert-Problems

$$\begin{aligned}
&\rho(x) u_{tt}(x, t) = \partial_x(\kappa(x) u_x(x, t)) \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\
&u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \quad (x \in [0, L]), \\
&u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (t \in [0, T])
\end{aligned}$$

ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $E(t) = 0$ für $t \in [0, T]$.

Aufgabe 6.4 **(4 Punkte)** Es sei $u \in C^2\big((0,1)\times(0,\infty)\big) \cap C^1\big([0,1]\times[0,\infty)\big)$ Lösung des Problems

$$
\begin{cases}
u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty),\\
u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \quad (x \in [0,1]),\\
u(0,t) = 0,\ u(1,t) = \mu(t) \quad (t \geq 0),
\end{cases} \tag{1}
$$

wobei zwischen $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ und μ folgender Zusammenhang bestehe:

$$
\mu(t) = -\int_t^2 \Phi(s)ds \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2 \quad \text{und} \quad \mu(t) = 0 \quad \text{für } t \geq 2
$$

mit

$$
\Phi(s) := \begin{cases} \frac{1}{2}\big(\psi(1-s) - \varphi'(1-s)\big), & 0 \leq s \leq 1,\\ -\frac{1}{2}\big(\psi(s-1) + \varphi'(s-1)\big), & 1 \leq s \leq 2. \end{cases}
$$

Zeigen Sie, dass dann $u(x,t) = u_t(x,t) = 0$ für $x \in [0,1]$ und $t \geq 2$ gilt.
Vergleichen Sie (1) mit Satz 5.3 bzw. Problem (5-3) aus der Vorlesung und geben Sie eine physikalische Interpretation der Problemstellung (1).
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 6.2.

Abgabetermin: Freitag 2. Dezember 2011, vor 10:00 Uhr im Briefkasten bei F411.