Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
David Grimm/Daniel Plaumann
WS 2007/2008

LINEARE ALGEBRA I

10. Übungsblatt
Abgabe am Freitag, dem 18. Januar 2008, 10:15 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten neben Raum F411

37. Es sei $d \in \mathbb{N}$, und sei $V = \{f \in \mathbb{R}[T]\,;\, \deg(f) \leq d\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens d. Sei $a \in \mathbb{R}$ und seien

$$\varphi\colon V \to V;\ f \mapsto f' \qquad \text{und} \qquad \psi\colon V \to V;\ f(T) \mapsto f(T+a).$$

(Dabei bezeichnet f' die Ableitung von f nach T). Zeigen Sie, dass φ und ψ Endomorphismen von V sind und bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\psi)$ für die Basis $\mathcal{B} := (1, T, T^2, \ldots, T^d)$.

38. Es sei K ein Körper. Die *Spur* einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ ist die Summe der Diagonaleinträge: $\mathrm{Sp}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Spurabbildung Sp:

(a) Für alle $A, B \in M_n(K)$ gelten

$$\mathrm{Sp}(A+B) = \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B) \quad \text{und} \quad \mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA).$$

(b) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K, und seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V. Sei $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit darstellenden Matrizen $A := \mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ bzw. $A' := \mathrm{Mat}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A')$$

gilt. (Die Spur hängt also nicht von der Wahl der Basis ab. Man schreibt auch $\mathrm{Sp}(\varphi) := \mathrm{Sp}(A)$.)

39. Prüfen Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_4$ über $\mathbb{R}$ lösbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + 7x_3 + 6x_4 &= 3a \\ -4x_2 + 10ax_4 &= -2 \\ 4x_1 + (2+4a)x_2 + 33x_3 + 39x_4 &= 12a + 1 \\ x_1 + ax_2 + (6-a)x_3 + 6x_4 &= 4a. \end{aligned}$$

40. Es sei $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V mit $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$.

(a) Seien

$$v_1' := -v_1 + 2v_3, \quad v_2' := -v_1 - v_2 + v_3, \quad v_3' := -2v_1 + v_3,$$

und sei $\mathcal{B}' := (v_1', v_2', v_3')$. Zeigen Sie, dass auch $\mathcal{B}'$ eine Basis ist und bestimmen Sie die Matrix $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$, die den Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ beschreibt.

(b) Ein Vektor $v \in V$ habe bezüglich $\mathcal{B}$ den Koordinatenvektor $\kappa_{\mathcal{B}}(v) = (-2, 4, -1)^t$. Berechnen Sie mittels der in (a) bestimmten Matrix den Koordinatenvektor $\kappa_{\mathcal{B}'}(v)$.

(c) Sei nun speziell $V := \mathbb{R}^3$, und setze

$$v_1 := (3, 0, 1)^t, \quad v_2 := (0, -1, 0)^t, \quad v_3 := (-2, 0, -1)^t.$$

Welche Koordinaten hat der Vektor $(5, -2, 1)^t \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$?