Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel.
David Grimm/Daniel Plaumann
WS 2007/2008

LINEARE ALGEBRA I

11. Übungsblatt
Abgabe am Freitag, dem 25. Januar 2008, **bis 10:15 Uhr**
in den entsprechenden Briefkasten neben Raum F411

41. a) Berechnen Sie die Inverse der folgenden invertierbaren Matrizen (bitte Rechenweg nachvollziehbar aufschreiben):

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_{11}), \qquad \begin{pmatrix} 1 & (2+i) & -3i \\ 4i & 5 & (1-i) \\ (2-3i) & 2i & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

b) Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

42. Seien

$$U := \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ und } W := \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

Unterräume des $\mathbb{R}^4$.
Geben Sie eine Basis für die Unterräume $U \cap W$, sowie $U + W$ an.

43. Sei K ein beliebiger Körper und $A, B \in M_n(K)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{rg}(AB) \geq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) - n.$$

44. Sei $V = \mathbb{Q}[T]$ der (unendlich dimensionale) $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Polynome über $\mathbb{Q}$. Für $d \in \mathbb{N}$ Bezeichne $V_d := \{f \in \mathbb{Q}[T] \mid \deg(f) \leq d\}$ den $d+1$-dimensionalen Untervektorraum der Polynome vom Grad $\leq d$.

(i) Finden Sie einen $\mathbb{Q}$-Vektorraumisomorphismus zwischen $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{Q})$ und dem Vektorraum

$$W = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mid a_n \in \mathbb{Q}\}$$

der unendlichen Folgen in $\mathbb{Q}$.

(ii) Zeigen Sie (unter Verwenden von Wissen aus der Analysis), dass $V = \bigcup_{d=1}^{\infty} V_d$ abzählbar und W überabzählbar ist, und dass es folglich keinen Isomorphismus zwischen V und V^* geben kann.