Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
David Grimm/Daniel Plaumann
WS 2007/2008

LINEARE ALGEBRA I

12. Übungsblatt
Abgabe am Freitag, dem 1. Februar 2008, 10:15 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten neben Raum F411

45. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie:

(a) Genau dann gilt $\varphi \circ \varphi = \varphi$, wenn es Untervektorräume U_1, U_2 von V gibt derart, dass
  (1) $V = U_1 + U_2$,
  (2) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$,
  (3) $\varphi(u_1 + u_2) = u_1$ für alle $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$
  gelten. In diesem Fall heißt φ die *Projektion von V auf U_1 längs U_2* (siehe auch Aufgabe 27).

(b) Genau dann gilt $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$, wenn es Untervektorräume U_1, U_2 von V gibt derart, dass
  (1) $V = U_1 + U_2$,
  (2) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$,
  (3) $\varphi(u_1 + u_2) = u_1 - u_2$ für alle $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$
  gelten. In diesem Fall heißt φ die *Spiegelung von V an U_1 längs U_2*.
  (*Hinweis:* Betrachten Sie die Abbildungen $\varphi \pm \mathrm{id}_V$.)

46. Es seien φ und ψ die Endomorphismen von $\mathbb{R}^3$, die bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ durch die Matrizen

$$\mathrm{Mat}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\psi) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Prüfen Sie für φ und ψ jeweils, ob diese Projektionen sind und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis des Untervektorraums U_1, auf den projiziert wird, sowie eine Basis des Untervektorraums U_2, längs dessen die Projektion erfolgt. (Zusatz: Wenn Sie diese beiden Basen zu einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ zusammensetzen, wie sieht dann die darstellende Matrix der Projektion bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus? *Hinweis:* Sie müssen dazu nicht den Basiswechsel ausrechnen!)

47. Sei die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = (2, 0, 1)^t$,$v_2 = (0, 2, -2)^t$ und $v_3 = (2, -6, 4)^t$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Setze $U_1 = \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$, $U_2 = \mathrm{Lin}(v_3)$. Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen der Spiegelung von $\mathbb{R}^3$ an U_1 längs U_2 bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ und bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ in $\mathbb{R}^3$.

48. Es sei K ein Körper. Seien V, W zwei K-Vektorräume und $U_1, U_2 \subset V$ zwei Untervektorräume. Sind $f_1\colon U_1 \to W$ und $f_2\colon U_2 \to W$ zwei K-lineare Abbildungen, so heißt eine K-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ eine *gemeinsame Fortsetzung von f_1 und f_2 auf V*, falls gilt:

$$f|_{U_1} = f_1 \qquad \text{und} \qquad f|_{U_2} = f_2.$$

(a) Zeigen Sie: Gelten $U_1 + U_2 = V$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, so existiert zu f_1 und f_2 genau eine gemeinsame Fortsetzung auf V.

(b) Allgemeiner: Was muss für U_1, U_2 und f_1, f_2 jeweils gelten, damit:
  (i) mindestens eine gemeinsame Fortsetzung von f_1 und f_2 auf V existiert?
  (ii) höchstens eine gemeinsame Fortsetzung von f_1 und f_2 auf V existiert?
  (iii) genau eine gemeinsame Fortsetzung von f_1 und f_2 auf V existiert?