Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel.
Sabine Burgdorf/Daniel Plaumann
WS 2007/2008

LINEARE ALGEBRA I

4. Übungsblatt
Abgabe am Freitag, dem 16. November 2007, **bis 10:15 Uhr**
in den entsprechenden Briefkasten neben Raum F411

13. Zeigen Sie unter Verwendung der Bezeichnungen und Resultate von Aufgabe 12, dass $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist, wenn man definiert:

$$A + B := A \Delta B \qquad \text{und} \qquad A \cdot B := A \cap B$$

für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

14. Sei $\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ein Ringhomomorphismus (zur Erinnerung: Dies bedeutet, dass $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ erfüllt sind.) Zeigen Sie, dass nur die folgende Alternative möglich ist:

$$\forall a \in \mathbb{Q}\colon\ \varphi(a) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \forall a \in \mathbb{Q}\colon\ \varphi(a) = a.$$

(*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst das Folgende: Falls $\varphi(b) \neq 0$ für ein $b \in \mathbb{Q}$, dann gilt $\varphi(1) = 1$.)

15. (a) Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Auf der Menge $\mathrm{End}(G)$ der Endomorphismen von G hat man die Verknüpfungen $+$ bzw. $\circ$, die durch $(\varphi + \psi)(g) := \varphi(g) + \psi(g)$ bzw. $(\varphi \circ \psi)(g) := \varphi(\psi(g))$ für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(G)$ und alle $g \in G$ erklärt sind. Vervollständigen Sie den Beweis aus der Vorlesung dafür, dass $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ ein Ring mit Eins ist.

(b) Sei $G = \{0, a, b, c\}$ die Kleinsche Vierergruppe (mit der Addition $+$ wie $*$ in Aufgabe 9.) Sei $R := \mathrm{End}(G)$ ihr Endomorphismenring. Zeigen Sie, dass R nicht kommutativ ist, indem Sie zwei Elemente $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(G)$ mit $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$ angeben.

16. In einem alten Lehrbuch findet sich (sinngemäß) die folgende Definition eines Körpers:
„Ein Körper ist eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen $+\colon K \times K \to K$ und $*\colon K \times K \to K$ derart, dass folgendes gilt:

(1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
(2) Sei 0 das neutrale Element der Addition $+$. Dann ist $(K \setminus \{0\}, *)$ eine abelsche Gruppe.
(3) Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $a * (b + c) = a * b + a * c$."

Wir definieren eine Verknüpfung $*\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ durch:

$$a * b = \begin{cases} a \cdot b & \text{falls } a \neq 0 \\ b & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}, +, *)$ im Sinn der obigen Definition ein Körper ist (d.h. (1)–(3) sind erfüllt), jedoch kein Körper im gebräuchlichen Sinn. (Hierbei sind $+$ und $\cdot$ die gewöhlichen Rechenzeichen in $\mathbb{Q}$). Was hat also der Autor der obigen Definition übersehen?