Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel.
Sabine Burgdorf/Daniel Plaumann
WS 2007/2008

LINEARE ALGEBRA I

5. Übungsblatt
Abgabe am am Freitag, dem 23. November 2007, **bis 10:15 Uhr**
in den entsprechenden Briefkasten neben Raum F411

17. Sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ quadratfrei. Wir versehen die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) := \{a + b\sqrt{d}\,;\ a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteqq \mathbb{C}$$

mit der Addition und Multiplikation von $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}), +, \cdot)$ ein Körper ist.
(*Hinweis:* Zeigen Sie zur Bestimmung der inversen Elemente zunächst, dass $x \cdot \kappa(x) \in \mathbb{Q}$ für alle $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ gilt, wobei $\kappa(a + b\sqrt{d}) := a - b\sqrt{d}$ die algebraische Konjugation ist.)

18. (a) Gegeben sei der Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der reellen Zahlen, sowie die Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sqrt[3]{x^3 + y^3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (\lambda, x) &\mapsto \sqrt[3]{\lambda} \cdot x. \end{aligned}$$

Untersuchen Sie jeweils, ob $(\mathbb{R}, \oplus, \cdot), (\mathbb{R}, +, \odot)$ oder $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ ein $\mathbb{R}-$Vektorraum ist.

(b) Gegeben sei der $\mathbb{R}-$Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit den punktweisen Verknüpfungen. Untersuchen Sie jeweils, welche der folgenden Teilmengen Untervektorräume von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind.
   (i) $\{\varphi \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\,;\ \forall x \in \mathbb{R}\colon \varphi(-x) = \varphi(x)\}$
   (ii) $\{\varphi \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\,;\ \forall x \in \mathbb{R}\colon \varphi(-x) = -\varphi(x)\}$
   (iii) $\{\varphi \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\,;\ \exists b \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}\colon \varphi(x) \leq b\}$

Alle Aussagen sind natürlich zu begründen.

19. Es sei K ein Körper, V ein $K-$Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteqq V$ zwei Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Untervektorraum von V ist, wenn $U_1 \subseteqq U_2$ oder $U_2 \subseteqq U_1$ gilt.

20. (a) Sei K ein Körper und $V = K^2$ aufgefasst als $K-$Vektorraum. Für $x = \binom{x_1}{x_2} \in V$ definieren wir die Teilmenge $Kx := \{\lambda \cdot x\,;\ \lambda \in K\} \subseteqq V$. Zeigen Sie:
   (i) Kx ist ein $K-$Untervektorraum von V.
   (ii) Zu jedem $K-$Untervektorraum $U \neq V$ von V gibt es ein $x \in V$ mit $U = Kx$.
   (iii) Für $x, y \in V$ gilt: $Kx = Ky \iff \exists \lambda \in K^*$ mit $x = \lambda y$.

(b) Bestimmen Sie alle Untervektorräume von $(\mathbb{F}_3)^2$.