Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel.
Sabine Burgdorf/Daniel Plaumann
WS 2007/2008

LINEARE ALGEBRA I

6. Übungsblatt
Abgabe am Freitag, dem 30. November 2007, **bis 10:15 Uhr**
in den entsprechenden Briefkasten neben Raum F411

Es sei K ein Körper, und sei V ein K-Vektorraum.

21. Es seien $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ vier über K linear unabhängige Vektoren. Prüfen Sie, welche der folgenden Vektorfamilien linear unabhängig über K sind, jeweils in den Fällen $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{F}_2$ und $K = \mathbb{F}_3$.

(a) $v_1 + v_2,\ v_1 - v_2$;
(b) $v_1 + v_2,\ v_2 + v_3,\ v_3 + v_4,\ v_4 + v_1$;
(c) $v_2 + v_3 + v_4,\ v_1 + v_3 + v_4,\ v_1 + v_2 + v_4,\ v_1 + v_2 + v_3$.

(*Hinweis:* Um nicht unnötig viel schreiben zu müssen, sollten Sie zunächst für einen beliebigen Körper K argumentieren und erst jeweils zum Schluss in die drei Fälle $K = \mathbb{Q}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ unterteilen.)

22. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus von V. Wir schreiben $f^i := f \circ \cdots \circ f$ (i-mal). Es gebe ein $v \in V$ und ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $f^n(v) \neq 0$ und $f^{n+1}(v) = 0$ gilt.
Zeigen Sie: Die Vektorfamilie
$$v, f(v), f^2(v), \ldots, f^n(v)$$
ist linear unabhängig über K.

23. Zeigen oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen für zwei Teilmengen $M, N \subset V$:

(a) $\mathrm{Lin}(M \cap N) = \mathrm{Lin}(M) \cap \mathrm{Lin}(N)$;
(b) $\mathrm{Lin}\big(\mathrm{Lin}(M) \cup \mathrm{Lin}(N)\big) = \mathrm{Lin}(M \cup N)$.

24. Es seien U_1, U_2, U_3 drei Untervektorräume von V. Beweisen Sie die folgende Implikation:
$$\big(U_1 \subset U_2 \quad \vee \quad U_2 \subset U_3\big) \quad \Longrightarrow \quad (U_1 + U_2) \cap U_3 = (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$$
(zur Erinnerung: Für zwei Untervektorräume U, U' von V ist $U + U' = \{u + u'; u \in U, u' \in U'\}$.)
Finden Sie ein Beispiel dafür, dass dies ohne die links stehende Voraussetzung i.A. falsch ist, dass also $(U_1 + U_2) \cap U_3 \neq (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$ möglich ist.