



LINEARE ALGEBRA I

9. Übungsblatt

Abgabe am Freitag, dem 11. Januar 2008, **bis 10:15 Uhr**
in den entsprechenden Briefkasten neben Raum F411

- 33.** Sei $\mathbb{R}[T]$ der Polynomring in einer Variablen mit Koeffizienten aus \mathbb{R} . Zeigen Sie:
- (a) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[T] = \infty$.
 - (b) Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[T] \rightarrow \mathbb{R}[T]$, welche injektiv, aber nicht surjektiv ist.
 - (c) Es gibt eine lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}[T] \rightarrow \mathbb{R}[T]$, welche surjektiv, aber nicht injektiv ist.

- 34.** Welche der folgenden Abbildungen sind linear, welche nicht ?

- (a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z)^t \mapsto (xy, x + y)^t$
- (b) $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; (x, y)^t \mapsto (x + 3y, y - 3x, 0)^t$
- (c) $\iota : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y)^t \mapsto (3x + 1, 4y + x + 1)^t$
- (d) $\kappa : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; (x, y, z)^t \mapsto (x + 2y + z, x + z, -x + 3y + 4z)^t$

Stellen Sie die linearen Abbildungen jeweils durch eine Matrix dar. Wie berechnet sich dann das Bild der jeweiligen Abbildung?

- 35.** Das *Zentrum* $Z(R)$ eines Ringes R ist die Menge aller Ringelemente, die mit allen anderen Elementen bzgl. der Multiplikation kommutieren, d.h. $Z(R) = \{a \in R; \forall b \in R : ab = ba\}$. Bestimmen Sie das Zentrum des Ringes $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ aller (2×2) -Matrizen mit Einträgen in \mathbb{R} .

Weihnachtsaufgabe Sie befinden sich auf der Weihnachtsfeier der Fachbereichs Mathematik. Die Menge der Plätzchen lässt sich inzwischen injektiv auf einen Null-dimensionalen Untervektorraum von \mathbb{Q} abbilden. Glücklicherweise ist immer noch Glühwein für alle da. Die Temperatur des Raumes steigt linear mit der Menge des bereits konsumierten Glühweins. Nachdem also die Temperatur einen Grenzwert überschritten hat, beschließt Prof. Barthel die lineare Funktion zu stören und öffnet ein Fenster. Sogleich wird der Raum mir einer erfrischenden Brise erfüllt. Unglücklicherweise steht aber eine Kerze direkt neben einem Tannengesteck, welches auch sofort zu brennen beginnt. Aber das Schicksal ist den Mathematikern wohlgesonnen: Es befindet sich ein Feuerwehrmann unter den Feiernden. Dieser erkennt sofort den Ernst der Lage und verkündet: „Dieses Feuer kann man nur mir genau vier Litern Wasser löschen. Nimmt man zu wenig, so brennen die Tannenzweige weiter, nimmt man zuviel, gibt es einen Wasserschaden.“ Eifrig wird nun nach einem geeigneten Gefäß gesucht. Man findet einen Krug, der drei Liter fasst, und einen Eimer, in den exakt fünf Liter passen. Aber der Feuerwehrmann hat sich schon zu oft am Glühwein bedient, er kann diese Aufgabe nicht lösen. Können Sie ihm helfen und die Weihnachtsfeier retten?

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr !