# KLAUSUR ZUR LINEAREN ALGEBRA I
# — MUSTERLÖSUNG —

15. Dezember 2007

**Name:**

---

**Matrikelnummer:**

---

**Studiengang:**

---

| **Aufgabe** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **Summe** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Punktzahl** | | | | | | **/40** |

**Allgemeine Hinweise:**

– Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen jeweils unter die Aufgabenstellung und ggf. auf die Rückseite. Wenn der Platz nicht ausreicht, bitten Sie die Aufsicht um zusätzliches **Aufgabenpapier**.
– Verwenden Sie immer **für jede Aufgabe ein separates Blatt.**
– Vermerken Sie **auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer**.
– Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist ein von Ihnen selbst beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt.

**Wir wünschen viel Erfolg!**

**Name:** **Matrikelnummer:**

---

**Aufgabe 1** **(8 Punkte)**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Es muss keine Begründung gegeben werden.

*Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Sie erhalten jedoch mindestens 0 Punkte.*
***Hinweis:*** *Unbeantwortete Fragen werden nicht als falsch gewertet. Wenn Sie sich nicht sicher sind, lassen Sie also besser eine Frage unbeantwortet als zu raten!*

| | | |
|---|---|---|
| Sei $(G, *)$ eine Gruppe, und seien $g_1, g_2, h \in G$. Gilt $g_1 * h = g_2 * h$, so folgt $g_1 = g_2$. | ☒ wahr | ☐ falsch |
| Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, und seien $a_1, a_2, b \in R$. Gilt $a_1 \cdot b = a_2 \cdot b$, so folgt $a_1 = a_2$. | ☐ wahr | ☒ falsch |
| Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper, so ist $(K, +)$ eine abelsche Gruppe. | ☒ wahr | ☐ falsch |
| Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper, so ist $(K, \cdot)$ eine abelsche Gruppe. | ☐ wahr | ☒ falsch |

*Es sei stets $K$ ein Körper, und sei $V$ ein $K$-Vektorraum:*

| | | |
|---|---|---|
| Für $0 \neq \lambda \in K$ und $0 \neq v \in V$ gilt stets $\lambda \cdot v \neq 0$. | ☒ wahr | ☐ falsch |
| Zu $v, w \in V$ existieren immer $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda, \mu \neq 0$ derart, dass $\lambda v + \mu w = 0$ gilt. | ☐ wahr | ☒ falsch |
| Sind $U_1, U_2$ zwei Untervektorräume von $V$, so ist auch $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von $V$. | ☐ wahr | ☒ falsch |
| Falls zu je zwei Vektoren $v, w \in V$, $w \neq 0$, ein $\lambda \in K$ mit $v = \lambda w$ existiert, so gilt $\dim_K V \leq 1$. | ☒ wahr | ☐ falsch |

**Name:** **Matrikelnummer:**

---

**Aufgabe 2** **(9 Punkte)**

Es sei $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Für alle $g, h \in G$ gilt $\overleftarrow{g * h} = \overleftarrow{h} * \overleftarrow{g}$. (2 Punkte)

(b) Gilt $g * g = e$ für alle $g \in G$, so ist $G$ abelsch. (3 Punkte)

(c) Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent: (4 Punkte)

(i) $G$ ist abelsch.

(ii) Die Abbildung $\iota \colon G \to G$, $\iota(g) = \overleftarrow{g}$, ist ein Gruppenhomomorphismus.

---

*Lösung.* (a) Seien $g, h \in G$. Dann gilt $(\overleftarrow{h} * \overleftarrow{g}) * (g * h) = \overleftarrow{h} * (\overleftarrow{g} * g) * h = \overleftarrow{h} * e * h = \overleftarrow{h} * h = e$. Also ist $\overleftarrow{h} * \overleftarrow{g}$ ein Inverses zu $g * h$. Da das Inverse in einer Gruppe eindeutig bestimmt ist, folgt die Behauptung.

(b) Es gelte $g * g = e$ für alle $g \in G$. Durch Multiplikation mit $\overleftarrow{g}$ folgt daraus $g = \overleftarrow{g}$ für alle $g \in G$. Damit folgt für alle $g, h \in G$: $g * h = \overleftarrow{g * h} \underset{(a)}{=} \overleftarrow{h} * \overleftarrow{g} = h * g$, wie behauptet.

(c) Sei $G$ abelsch, d.h. es gelte $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$. Wir müssen $\iota(g * h) = \iota(g) * \iota(h)$ für alle $g, h \in G$ zeigen. Seien also $g, h \in G$. Es gilt $\iota(g * h) = \overleftarrow{g * h} \underset{(a)}{=} \overleftarrow{h} * \overleftarrow{g} = \overleftarrow{g} * \overleftarrow{h} = \iota(g) * \iota(h)$. Also ist $\iota$ ein Gruppenhomomorphismus.

Umgekehrt sei $\iota$ ein Gruppenhomomorphismus, und seien $g, h \in G$. Dann gilt für alle $g, h \in G$: $\iota(g * h) = \iota(g) * \iota(h)$, also $\overleftarrow{g * h} = \overleftarrow{g} * \overleftarrow{h}$. Da $\overleftarrow{(\overleftarrow{g})} = g$ für alle $g \in G$ gilt, folgt damit auch

$$g * h = \overleftarrow{\left(\overleftarrow{g * h}\right)} = \overleftarrow{\left(\overleftarrow{g} * \overleftarrow{h}\right)} = \overleftarrow{\left(\overleftarrow{h * g}\right)} = h * g.$$

$\square$

**Name:** **Matrikelnummer:**

---

**Aufgabe 3** **(9 Punkte)**

Es sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{R}$. Untersuchen Sie jeweils, welche der folgenden Teilmengen von $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ Untervektorräume sind. Die Antwort ist jeweils zu begründen.

(a) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})\ ;\ f(0) = 0\}$ (3 Punkte)
(b) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})\ ;\ \forall x \in \mathbb{Z}\colon f(x) \neq 0\}$ (3 Punkte)
(c) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})\ ;\ \exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{Z}\colon -a \leq f(x) \leq a\}$ (3 Punkte)

*zur Erinnerung:* Die Vektorraumstruktur auf $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ ist folgendermaßen erklärt: Für $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $f + g$ die Funktion $x \mapsto f(x) + g(x)$ und $\lambda \cdot f$ die Funktion $x \mapsto \lambda \cdot f(x)$.

---

*Lösung.* Um zu zeigen, dass eine Teilmenge $U$ von $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ ein Untervektorraum ist, ist Folgendes nachzuweisen:
(1) $0 \in U$.
(2) Für alle $u, v \in U$ gilt $u + v \in U$.
(3) Für alle $u \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda u \in U$.
Hierbei ist die 0 in $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ die Nullabbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$.

(a) Die Teilmenge $U := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})\ ;\ f(0) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})$: Es gilt $0 \in U$. Sind $f, g \in U$, so gilt $f(0) = g(0) = 0$ und damit auch $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0$, also ist $f + g \in U$. Ebenso gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda f)(0) = \lambda \cdot f(0) = 0$, also ist $\lambda f \in U$.

(b) Die Teilmenge $U := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})\ ;\ \forall x \in \mathbb{Z}\colon f(x) \neq 0\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, denn $0 \notin U$.

(c) Die Teilmenge $U := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R}); \exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{Z}\colon -a \leq f(x) \leq a\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z},\mathbb{R})$: Es gilt $0 \in U$, denn $a = 0$ ist eine Schranke für die Nullabbildung. Seien $f, g \in U$. Dann gibt es also $a, b \in \mathbb{R}$ mit $-a \leq f(x) \leq a$ und $-b \leq g(x) \leq b$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. Damit gilt $-(a + b) \leq f(x) + g(x) \leq a + b$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. Also ist $f + g \in U$. Ferner gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $-|\lambda a| \leq (\lambda f)(x) \leq |\lambda a|$ für alle $x \in \mathbb{Z}$, also folgt $\lambda f \in U$. $\square$

**Name:** **Matrikelnummer:**

---

**Aufgabe 4** **(8 Punkte)**

Es seien $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$.

(a) Entscheiden Sie, ob die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ jeweils im erzeugten Untervektorraum $\mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ liegen. (4 Punkte)

(b) Entscheiden Sie, für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ der Vektor $w_a := \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ liegt. (4 Punkte)

Die Antwort ist jeweils zu begründen.

---

*Lösung.* Es gilt $\mathrm{Lin}(v_1, v_2) = \{v \in \mathbb{R}^3 \,;\, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \colon v = \lambda v_1 + \mu v_2\}$.

(a) Setze $v := (1,1,1)^t$. Möglicherweise sieht man sofort und ohne zu rechnen, dass $v = \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2$ gilt, und damit $v \in \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$. Wenn man es nicht sieht, muss man rechnen: Genau dann liegt $v$ in $\mathrm{Lin}(v_1, v_2)$, wenn es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass $v = \lambda v_1 + \mu v_2$ gilt. Das bedeutet, dass die folgenden drei Gleichungen erfüllt sein müssen:

$$\begin{aligned} \lambda + 3\mu &= 1 \\ 2\lambda + 2\mu &= 1 \\ 3\lambda + \mu &= 1. \end{aligned}$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach $\lambda$ ergibt $\lambda = \frac{1}{2} - \mu$ und Einsetzen in die erste Gleichung gibt $\frac{1}{2} - \mu + 3\mu = 1$, also wie behauptet $\mu = \frac{1}{4}$ und damit $\lambda = \frac{1}{4}$. Auch die dritte Gleichung ist erfüllt.

Für den Vektor $(1,0,1)^t$ kommt man auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda + 3\mu &= 1 \\ 2\lambda + 2\mu &= 0 \\ 3\lambda + \mu &= 1. \end{aligned}$$

Aus der mittleren Zeile folgt $\lambda = -\mu$, was nach Einsetzen in die erste Zeile $\mu = \frac{1}{2}$ ergibt. Nach Einsetzen in die letzte Zeile folgt $-1 = 1$, ein Widerspruch. Also liegt $(1,0,1)^t$ nicht in $\mathrm{Lin}(v_1, v_2)$.

(b) Betrachte die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda + 3\mu &= 0 \\ 2\lambda + 2\mu &= a \\ 3\lambda + \mu &= 1. \end{aligned}$$

Aus der mittleren Zeile folgt $\lambda = \frac{a}{2} - \mu$, was nach Einsetzen in die obere auf $\mu = -\frac{a}{4}$ und damit $\lambda = \frac{3a}{4}$ führt. Beides in die letzte Gleichung eingesetzt zeigt, dass das Gleichungssystem genau dann lösbar ist, wenn $a = \frac{1}{2}$ gilt. Also ist $w_{\frac{1}{2}} \in \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ und $w_a \notin \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ für alle $a \neq \frac{1}{2}$. $\square$

**Name:** **Matrikelnummer:**

---

**Aufgabe 5** **(6 Punkte)**

Es sei $K$ ein Körper, und es sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Seien $v_1, v_2 \in V$ zwei über $K$ linear unabhängige Vektoren, und sei $v_3 \in V$ derart, dass $v_1, v_2, v_3$ über $K$ linear abhängig sind.
Zeigen Sie: Es gibt $\lambda, \mu \in K$ mit

$$v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2.$$

---

*Lösung.* Nach Voraussetzung sind $v_1, v_2, v_3$ linear abhängig über $K$. Es gibt also $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$, die nicht alle drei 0 sind, derart, dass

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

gilt. Wir behaupten, dass $\alpha_3 \neq 0$ gelten muss. Denn wäre $\alpha_3 = 0$, so würde $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ folgen, und es müsste mindestens eines von $\alpha_1, \alpha_2$ von 0 verschieden sein. Damit wären $v_1, v_2$ linear abhängig, ein Widerspruch.
Also ist $\alpha_3 \neq 0$, und es gilt

$$v_3 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} v_1 + (-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}) v_2.$$

Die Behauptung gilt also für $\lambda = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}$ und $\mu = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$. $\square$