KLAUSUR ZUR LINEAREN ALGEBRA I UND II

2. Oktober 2008

— MUSTERLÖSUNG —

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 1 **(6 Punkte)**

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$.

(a) Definieren Sie, wann die endliche Familie $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig über K heißt. (2 Punkte)

(b) Beweisen Sie: Gilt $v_1 = v_2$, so sind $v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig. (2 Punkte)

(c) Sei W ein weiterer K-Vektorraum, $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. (2 Punkte)
Beweisen Sie: Sind $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ linear unabhängig, so sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Lösung. (a) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißen linear unabhängig, falls für alle $a_1, \ldots, a_n \in K$ gilt: Ist $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$, so folgt $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

(b) Ist $v_1 = v_2$, so definiere $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, und $a_3 = \cdots = a_n = 0$. Dann ist $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$, aber $a_1 \neq 0$, also sind $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

(c) Sind $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$, so folgt $0 = \varphi(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 \varphi(v_1) + \cdots + a_n \varphi(v_n)$ (wegen φ linear) und damit $a_1 = \cdots = a_n = 0$, da $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ linear unabhängig sind. $\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $M = \{1, \ldots, n\}$. Sei $V = \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $M \to \mathbb{R}$. Seien $f_1, \ldots, f_n \in V$ wie folgt definiert:

$$f_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \qquad (j \in M).$$

Zeigen Sie, dass die Familie $f_1, \ldots, f_n$ eine Basis von V bildet.

Lösung. Die Familie $f_1, \ldots, f_n$ ist linear unabhängig über $\mathbb{R}$: Denn sind $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0$ so folgt $0 = (a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n)(i) = a_1 f_1(i) + \cdots + a_n f_n(i) = a_i f_i(i) = a_i$ für alle $i \in M$.

Die Familie $f_1, \ldots, f_n$ ist ein Erzeugendensystem von V: Denn ist $f \in V$, so setze $a_i := f(i)$ für alle $i \in M$. Dann gilt $f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$. $\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssytem über $\mathbb{R}$ in den Unbestimmten x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= \lambda + 7 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + \lambda(\lambda-1)x_3 &= 2 - \lambda \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$, für die

(a) eine eindeutige Lösung in $\mathbb{R}^3$

(b) unendlich viele Lösungen in $\mathbb{R}^3$

(c) keine Lösung in $\mathbb{R}^3$

existiert. Der Lösungsweg muss klar erkennbar sein.

Lösung. Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix zum gegebenen Gleichungssystem auf obere Dreiecksgestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \lambda+7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \lambda+7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & \lambda(\lambda-1)-6 & -3\lambda-12 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \lambda+7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & -3\lambda \end{pmatrix}.$$

Nun können wir die Antworten zu (a), (b) und (c) einfach ablesen:
(a) Genau dann ist ein LGS in n Unbestimmten eindeutig lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix den Rang n hat. Das ist hier mit $n = 3$ genau dann der Fall, wenn $\lambda(\lambda-1) \neq 0$, also wenn $\lambda \neq 0$ und $\lambda \neq 1$ gilt.
(b) Genau dann hat ein LGS in n Unbestimmen unendlich viele Lösungen, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix und der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmen, aber beide echt kleiner als n sind. Das ist hier mit $n = 3$ genau dann der Fall, wenn $\lambda(\lambda-1) = 0$ und $-3\lambda = 0$ gelten, also genau für $\lambda = 0$.
(c) Genau dann hat ein LGS keine Lösung, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix echt kleiner ist als der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix. Das ist hier genau dann der Fall, wenn $\lambda(\lambda-1) = 0$, aber $-3\lambda \neq 0$ ist, also genau für $\lambda = 1$. $\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

(a) Nennen Sie wenigstens drei Bedingungen für die Diagonalisierbarkeit einer quadratischen Matrix mit Einträgen in einem Körper K und geben Sie für jede dieser Bedingungen an, ob sie notwendig oder hinreichend (oder beides) ist. (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie alle Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$, für die die reelle Matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & \lambda - 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist. (3 Punkte)

(Es ist nicht verlangt, den Basiswechsel, der A_λ ggf. in eine Diagonalmatrix überführt, explizit auszurechnen.)

Lösung. (a) Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn K^n eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt (notwendig und hinreichend). Ist A diagonalisierbar, so zerfällt das charakteristische Polynom von A in Linearfaktoren (notwendig, aber nicht hinreichend). Wenn das charakteristische Polynom in verschiedene Linearfaktoren zerfällt, dann ist A diagonalisierbar (hinreichend, aber nicht notwendig). Genau dann ist A diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen (notwendig und hinreichend, *2 Punkte*). Ist $K = \mathbb{R}$, so ist jede symmetrische Matrix diagonalisierbar (hinreichend, nicht notwendig). Ist $K = \mathbb{C}$, so ist jede hermitesche Matrix diagonalisierbar (hinreichend, nicht notwendig). Akzeptiert wurde auch die Definition: Es existieren eine invertierbare $n \times n$-Matrix T und eine Diagonalmatrix D derart, dass $D = T^{-1}AT$ gilt.

(b) Das charakteristische Polynom bestimmt sich zu $P_{A_\lambda}(T) = T^2 - \lambda T + 1$. Die komplexen Eigenwerte von A_λ sind dessen Nullstellen, also $\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 1}$. Genau dann, wenn $|\lambda| \geq 2$ ist, sind also die Eigenwerte reell, was notwendig für Diagonalisierbarkeit ist. Für $|\lambda| > 2$ sind die Nullstellen verschieden, so dass A_λ diagonalisierbar ist. In den Fällen $\lambda = \pm 2$ erhält man die Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit doppeltem Eigenwert 1 bzw. -1. In beiden Fällen hat der Eigenwert aber nur die geometrische Vielfachheit 1, so dass A_2 und A_{-2} nicht diagonalisierbar sind. □

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und seien A, B zwei $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in K.
Die Matrizen A und B heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare $n \times n$-Matrix T gibt derart, dass $B = T^{-1}AT$ gilt. Sie heißen *kongruent*, wenn es eine invertierbare $n \times n$-Matrix T gibt derart, dass $B = T^tAT$ gilt.

(a) Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Erklären Sie **kurz**, wie die Ähnlichkeit und die Kongruenz von $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in K mit der Beschreibung von Endomorphismen von V und Bilinearformen auf V durch Matrizen zusammenhängen. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie: Ist A symmetrisch und B kongruent zu A, so ist auch B symmetrisch. (1 Punkt)

(c) Entscheiden Sie für $K = \mathbb{Q}$, ob die folgenden beiden Matrizen ähnlich oder kongruent sind:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Antwort ist zu begründen. Es ist aber nicht verlangt, die jeweilige Matrix T explizit auszurechnen. (3 Punkte)

Lösung. (a) Ist φ ein Endomorphismus von V und b eine Bilinearform auf V, so können wir nach Wahl einer Basis $\mathcal{B}$ von V die darstellenden Matrizen $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b)$ definieren. Ist $\mathcal{B}'$ eine andere Basis und ist $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ die Matrix, die den Basiswechsel beschreibt, so gelten

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

und

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(b) = (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{t}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b)T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Umgekehrt beschreibt jede Matrix nach Wahl einer Basis einen Endomorphismus und eine Bilinearform.
Es gilt also (und das genügt als kurze Antwort:) Zwei Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie bezüglich zweier geeigneter Basen von V denselben Endomorphismus beschreiben, und sind genau dann kongruent, wenn sie bezüglich zweier geeigneter Basen dieselbe Bilinearform beschreiben.

(b) Genau dann ist eine Matrix C symmetrisch, wenn $C^t = C$ gilt. Ferner gilt $(CD)^t = D^tC^t$ für alle Matrizen C, D. Nun ist hier $B^t = (T^tAT)^t = T^tA^tT = T^tAT = B$. Also ist B symmetrisch.

(c) Die Matrizen sind ähnlich, da sie dieselben Eigenwerte haben (4 und 1) und die beiden Eigenwerte verschieden sind. Sie sind damit beide zur selben Diagonalmatrix ähnlich. Die Matrizen sind nicht kongruent, denn dann wären nach (b) entweder beide symmetrisch oder keine von beiden. $\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 6 **(6 Punkte)**

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und sei $h \in G$. Durch

$$\alpha(g) := h^{-1} \cdot g \cdot h$$

ist eine Abbildung $\alpha\colon G \to G$ definiert. Zeigen Sie:

(1) Die Abbildung α ist ein Gruppenhomomorphismus. (2 Punkte)

(2) Die Abbildung α ist bijektiv. (2 Punkte)

(3) Es gilt $\alpha = \mathrm{id}_G$ genau dann, wenn $g \cdot h = h \cdot g$ für alle $g \in G$ erfüllt ist. (2 Punkte)

Lösung. (a) Wir müssen $\alpha(g \cdot g') = \alpha(g) \cdot \alpha(g')$ für alle $g, g' \in G$ nachweisen: Seien $g, g' \in G$. Dann gilt $\alpha(g) \cdot \alpha(g') = h^{-1} g \cdot h \cdot h^{-1} \cdot g' \cdot h = h^{-1} \cdot g \cdot g' \cdot h = \alpha(g \cdot g')$.

(b) Für die Injektivität ist zu zeigen: Für alle $g, g' \in G$: $(\alpha(g) = \alpha(g') \Rightarrow g = g')$. Seien also $g, g' \in G$ und es gelte $\alpha(g) = \alpha(g')$. Das bedeutet $h^{-1} \cdot g \cdot h = h^{-1} \cdot g' \cdot h$. Durch Multiplikation mit h von links und mit h^{-1} von rechts folgt $g = g'$.
Alternativ: Sei 1 das neutrale Element von G. Der Gruppenhomomorphismus $\alpha\colon G \to G$ ist genau dann injektiv, wenn er trivialen Kern besitzt, wenn also $\alpha(g) = 1 \Rightarrow g = 1$ für alle $g \in G$ gilt. Sei $g \in G$ mit $\alpha(g) = 1$. Das bedeutet $h^{-1} \cdot g \cdot h = 1$ und damit $g \cdot h = h$ und somit $g = 1$.
Für die Surjektivität ist zu zeigen: Zu jedem $g \in G$ existiert $g' \in G$ derart, dass $\alpha(g') = g$ gilt. Sei also $g \in G$. Setze $g' := h \cdot g \cdot h^{-1}$. Dann gilt $\alpha(g') = h^{-1} \cdot h \cdot g \cdot h^{-1} \cdot h = g$.

(c) Es gelte $g \cdot h = h \cdot g$ für alle $g \in G$. Dann gilt $\alpha(g) = h^{-1} \cdot g \cdot h = h^{-1} \cdot h \cdot g = g$ für alle $g \in G$. Also ist $\alpha = \mathrm{id}_G$. Umgekehrt gelte $\alpha = \mathrm{id}_G$. Das bedeutet $g = \alpha(g) = h^{-1} \cdot g \cdot h$ für alle $g \in G$. Durch Multiplikation mit h von links folgt $h \cdot g = g \cdot h$, wie behauptet. $\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 7 **(6 Punkte)**

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf V.

(a) Definieren Sie, wann b positiv semidefinit und wann negativ semidefinit genannt wird. (2 Punkte)

(b) Beweisen Sie: Ist b positiv semidefinit und negativ semidefinit, so folgt $b(v, w) = 0$ für alle $v, w \in V$. (2 Punkte)

(c) Beweisen Sie: Gilt $b(v, w) \geq 0$ für alle $v, w \in V$, so folgt $b(v, w) = 0$ für alle $v, w \in V$. (2 Punkte)

Lösung. (a) Die Bilinearform b heißt positiv semidefinit, wenn für alle $v \in V$ gilt: $b(v, v) \geq 0$. Sie heißt negativ semidefinit, wenn für alle $v \in V$ gilt: $b(v, v) \leq 0$.

(b) Wenn b sowohl positiv als auch negativ semidefinit ist, dann gilt $b(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Es gilt für alle $v, w \in V$:

$$b(v, w) = \frac{1}{2}\big(b(v + w, v + w) - b(v, v) - b(w, w)\big)$$

(Polarisationsformel). Aus $b(v + w, v + w) = b(v, v) = b(w, w) = 0$ folgt also $b(v, w) = 0$.

(c) Seien $v, w \in V$. Nach Voraussetzung ist $b(v, w) \geq 0$, damit folgt wegen Bilinearität $b(-v, w) = -b(v, w) \leq 0$. Also ist $b(-v, w) = 0$ und damit $b(v, w) = 0$. $\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 8 **(6 Punkte)**

Sei K ein Körper, und sei A eine quadratische Matrix mit Einträgen in K. Sei P_A das charakteristische Polynom und M_A das Minimalpolynom von A. Beweisen Sie, dass P_A von M_A geteilt wird.

Lösung. Da M_A das Minimalpolynom ist, gilt $\deg(M_A) \leq \deg(p)$ für jedes Polynom $P \in K[T]$, das $P(A) = 0$ erfüllt. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $P_A(A) = 0$. Wir teilen also P_A mit Rest durch M_A und erhalten $Q, R \in K[T]$ derart, dass $P_A = Q \cdot M_A + R$ gilt und $\deg(R) < \deg(M_A)$. Es folgt $R(A) = P_A(A) - Q(A)M_A(A) = 0$ und damit $R = 0$ wegen der Minimalität von $\deg(M_A)$. Also gilt $P_A = Q \cdot M_A$, mit anderen Worten, M_A teilt P_A. $\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 9 **(6 Punkte)**

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $V \neq \{0\}$. Sei H eine Hyperebene in V, also ein Untervektorraum mit $\dim(H) = \dim(V) - 1$. Sei U ein Unterraum von V mit $U \nsubseteq H$. Zeigen Sie:

$$\dim(U \cap H) = \dim(U) - 1.$$

Lösung. Die allgemeine Dimensionsformel für den Durchschnitt zweier Unterräume U_1 und U_2 sagt

$$\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2).$$

Wegen $U \nsubseteq H$ gilt $H \subsetneq U + H$. (Denn ist $v \in U$, $v \notin H$, so folgt $v = v + 0 \in (U + H) \setminus H$. Damit folgt $\dim(U + H) > \dim(H) = \dim(V) - 1$ und damit $\dim(U + H) = \dim(V)$. Daraus folgt $U + H = V$. Einsetzen in die obige Dimensionsformel gibt

$$\dim(U \cap H) = \dim(U) + \dim(H) - \dim(U + H) = \dim(U) + \dim(V) - 1 - \dim(V) = \dim(U) - 1,$$

wie behauptet. $\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 10 **(6 Punkte)**

Sei K ein Körper und seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie die Dimensionsformel

$$\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(V).$$

Lösung. Laut Vorlesung existiert zum Unterraum $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ein Komplement in V, d.h. ein Unterraum U von V mit $V = \mathrm{Kern}(\varphi) + U$ und $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap U = \{0\}$. Die Einschränkung $\varphi|_U\colon U \to W$ ist injektiv: Denn eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn ihr Kern $\{0\}$ ist, und es gilt $\mathrm{Kern}(\varphi|_U) = \mathrm{Kern}(\varphi) \cap U = \{0\}$. Damit folgt $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(U)$ und somit $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(V)$ wie behauptet.

Wenn man diesen kurzen Beweis undurchsichtig findet, kann man auch direkt mit Basen argumentieren: Die Dimension eines Vektorraums ist bekanntlich die Länge einer Basis. Sei $v_1, \ldots, v_d$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ (also $d = \dim(\mathrm{Kern}(\varphi))$). Nach dem Basisergänzungssatz kann man $v_1, \ldots, v_d$ zu einer Basis $v_1, \ldots, v_d, v_{d+1}, \ldots, v_n$ von V verlängern (mit $d \leq n = \dim(V)$). Sei $U = \mathrm{Lin}(v_{d+1}, \ldots, v_n)$. Behaupte, dass $\varphi(v_{d+1}), \ldots, \varphi(v_n)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ ist. Da $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V sind, sind $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(\varphi)$. Aber $\varphi(v_1) = \cdots = \varphi(v_d) = 0$. Damit sind $\varphi(v_{d+1}), \ldots, \varphi(v_n)$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(\varphi)$. Sie sind auch linear unabhängig: Denn sind $a_{d+1}, \ldots, a_n \in K$ mit $a_{d+1}\varphi(v_1) + \cdots + a_n\varphi(v_n) = 0$, so folgt mit Linearität von φ: $\varphi(a_{d+1}v_{d+1} + \cdots + a_nv_n) = 0$, also $a_{d+1}v_{d+1} + \cdots + a_nv_n \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Da $v_1, \ldots, v_d$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ist, gibt es $b_1, \ldots, b_d$ mit $a_{d+1}v_{d+1} + \cdots + a_nv_n = b_1v_1 + \cdots + b_dv_d$, also $b_1v_1 + \cdots + b_dv_d - a_{d+1}v_{d+1} - \cdots - a_nv_n = 0$. Es folgt $a_{d+1} = \cdots = a_n = 0$, da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind. Damit ist gezeigt, dass $\varphi(v_{d+1}), \ldots, \varphi(v_n)$ linear unabhängig und damit eine Basis von $\mathrm{Bild}(V)$ sind. Also gilt $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = n - d$ und damit $\dim(V) = n = d + (n - d) = \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$, wie gewünscht. $\square$