KLAUSUR ZUR LINEAREN ALGEBRA II

19. Juli 2008

— MUSTERLÖSUNG —

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Summe**
Punktzahl							$/$**50**

Allgemeine Hinweise:

– Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen jeweils unter die Aufgabenstellung und ggf. auf die Rückseite. Wenn der Platz nicht ausreicht, bitten Sie die Aufsicht um zusätzliches **Aufgabenpapier**.
– Verwenden Sie immer **für jede Aufgabe ein separates Blatt.**
– Vermerken Sie **auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer**.
– Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist ein von Ihnen selbst beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt.

Wir wünschen viel Erfolg!

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum, $V \neq \{0\}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Abbildungen β K-bilinear sind:

(a) $\beta\colon K^2 \times K^2 \to K$, $\beta\left(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}\right) = x_1y_2 + x_2y_1$; (2 Punkte)

(b) $\beta\colon K^2 \times K^2 \to K$, $\beta\left(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}\right) = x_1x_2 + y_1y_2$; (2 Punkte)

(c) $\beta\colon V \times V \to V$, $\beta(v, w) = v + w$; (2 Punkte)

(d) $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$; $\beta\colon K \times V \to V$, $\beta(\alpha, v) = \alpha \cdot \varphi(v)$; (2 Punkte)

Lösung. Für die Bilinearität einer Abbildung $\beta\colon V \times W \to U$ ist jeweils zu zeigen, dass für alle $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und alle $\lambda \in K$ gelten:

(1) $\beta(v + v', w) = \beta(v, w) + \beta(v', w)$ und $\beta(v, w + w') = \beta(v, w) + \beta(v, w')$,

(2) $\beta(\lambda v, w) = \beta(v, \lambda w) = \lambda\beta(v, w)$,

bzw. es ist zu belegen, dass wenigstens eine dieser Bedingungen verletzt ist.

(a) Die Abbildung β ist bilinear, wie man sofort nachrechnet: Für alle $x, x', y, y' \in K^2$, $\lambda \in K$ gilt: $\beta(x + x', y) = (x_1 + x_1')y_2 + (x_2 + x_2')y_1 = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1'y_2 + x_2'y_1 = \beta(x, y) + \beta(x', y)$, genauso $\beta(x, y + y') = \beta(x, y) + \beta(x, y')$; schließlich $\beta(\lambda x, y) = \lambda x_1y_2 + \lambda x_2y_1 = \lambda(x_1y_2 + x_2y_1) = \lambda\beta(x, y)$ und $\beta(x, \lambda y) = x_1\lambda y_2 + x_2\lambda y_1 = \lambda(x_1y_2 + x_2y_1) = \lambda\beta(x, y)$.

(b) Die Abbildung β ist nicht bilinear. Denn sonst müsste nach (2) für alle $x = \binom{x_1}{x_2} \in K^2$ gelten: $\beta(x, 0) = 0 \cdot \beta(x, 0) = 0$. Sind $x_1, x_2 \in K$ beide $\neq 0$, so ist jedoch $\beta(x, 0) = x_1x_2 \neq 0$.

(c) Die Abbildung β ist nicht bilinear, denn $\beta(v + v', w) = v + v' + w$ und $\beta(v, w) + \beta(v', w) = v + v' + 2w$. Würde (1) gelten, so hätten wir also $w = 0$ für alle $w \in V$, was wegen $V \neq \{0\}$ nicht sein kann.

(d) Die Abbildung β ist bilinear: Seien $\alpha, \alpha' \in K$, $v, v' \in V$, $\lambda \in K$. Dann gilt $\beta(\alpha + \alpha', v) = (\alpha + \alpha')\varphi(v) = \alpha\varphi(v) + \alpha'\varphi(v) = \beta(\alpha, v) + \beta(\alpha', v)$; zweitens $\beta(\alpha, v + v') = \alpha\varphi(v + v') = \alpha\varphi(v) + \alpha\varphi(v') = \beta(\alpha, v) + \beta(\alpha, v')$; ferner $\beta(\lambda\alpha, v) = \lambda(\alpha\varphi(v)) = \lambda(\beta(\alpha, v)) = \lambda(\alpha\varphi(v)) = \alpha\varphi(\lambda v)) = \beta(\alpha, \lambda v)$.

In (b) und (c) gibt es jeweils verschiedene Möglichkeiten zu zeigen, dass β niemals bilinear sein kann.

□

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Entscheiden Sie, für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

positiv definit und für welche sie positiv semidefinit ist. Die Antwort ist zu begründen.

Lösung. Erste Möglichkeit: Durch simultane Zeilen- und Spaltenumformungen bringt man A_λ auf Diagonalgestalt: Es genügt, die erste Zeile mit λ multipliziert von der zweiten abzuziehen, danach die erste Spalte mit λ multipliziert von der zweiten Spalte. Man erhält die Diagonalmatrix

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

die genau dann positiv (semi-)definit ist, wenn A_λ positiv (semi-)definit ist, denn sie beschreibt dieselbe Bilinearform nach Basiswechsel. Nun sieht man direkt, dass B_λ genau für $0 < \lambda < 1$ positiv definit und für $0 \leq \lambda \leq 1$ positiv semidefinit ist.

Zweite Möglichkeit: Nach dem Hauptminorenkriterium ist A_λ genau dann positiv definit, wenn die Determinanten

$$\det(1) = 1,\ \det\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = 1-\lambda^2,\ \det(A_\lambda) = \lambda(1-\lambda^2)$$

alle positiv sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn $0 < \lambda < 1$ gilt. Leider funktionier das Hauptminorenkriterium in seiner einfachsten Form nicht für Semidefinitheit (auch wenn man hier mit Stetigkeit argumentieren könnte). Es bleibt aber nur der Fall, dass A_λ singulär ist, also $\det(A_\lambda) = 0$. Nach obiger Rechnung kann das nur für $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ passieren. Die Matrix A_0 ist offenbar positiv semidefinit. Ebenso die Matrix A_1, denn für alle $x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$ gilt $x^t A_1 x = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3)(x_1, x_2, x_3)^t = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2 \geq 0$. Die Matrix A_{-1} ist nicht positiv semidefinit, denn $e_3^t A_{-1} e_3 = -1 < 0$.

Dritte Möglichkeit: Man kann es auch einfach direkt ausrechnen: Für $x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$ ist $x^t A_\lambda x = x_1^2 + \lambda x_1 x_2 + \lambda x_1 x_2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 = (\lambda x_1 + x_2)^2 + (1-\lambda)x_1^2 + \lambda x_3^2$. Man sieht direkt, dass dieser Ausdruck für alle $0 < \lambda < 1$ und alle $(x_1, x_2, x_3)^t \neq (0,0,0)^t$ strikt positiv und für $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ für alle x_1, x_2, x_3 nicht-negativ ist. Ist $\lambda > 1$, so setze etwa $x = (1, -\lambda, 0)^t$ und erhalte $x^t A_\lambda x = (1-\lambda) < 0$. Ist $\lambda < 0$, so setze $x = (0,0,1)^t$ und erhalte $x^t A x = \lambda < 0$.

□

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 3 **(9 Punkte)**

Sei K ein Körper.

(a) Sei $P(T) = (T-1)(T-2)^4$. Welche Jordanschen Normalformen treten bei 5×5-Matrizen mit Einträgen in K auf, deren charakteristisches Polynom P ist? (5 Punkte)

(b) Sei $Q(T) = (T-1)^2$. Begründen Sie, warum eine 2×2-Matrix mit Einträgen in K, deren Minimalpolynom Q ist, niemals diagonalisierbar sein kann. (4 Punkte)

Lösung. (a) Eine Matrix mit charakteristischem Polynom P hat den Eigenwert 1 mit der algebraischen Vielfachheit 1 sowie den Eigenwert 2 mit der algebraischen Vielfachheit 4. Die Jordansche Normalform hat also einen Jordansuperblock der Größe 4 zum Eigenwert 2 und einen Jordansuperblock der Größe 1 zum Eigenwert 1. Für den kleinen Jordansuperblock gibt es nur eine Möglichkeit, für den großen dagegen fünf mögliche Unterteilungen in Jordanblöcke, deren Größen sich zu 4 aufsummieren: $1+1+1+1$, $2+1+1$, $3+1$, 4, $2+2$. Die möglichen Jordanschen Normalformen sind also:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_2(K)$ derart, dass $D := T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat. Falls $Q(A) = 0$ gilt, dann auch $Q(D) = 0$. Dann müssen aber alle Diagonaleinträge von D gleich 1 sein. Also ist D die Einheitsmatrix. Deren Minimalpolynom ist aber $T-1$. (Allgemein überlegt man sich mit dem gleichen Argument: Eine Matrix (beliebiger Größe), deren Minimalpolynom einen mehrfachen Faktor enthält, kann nicht diagonalisierbar sein). $\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 4 **(8 Punkte)**

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

(a) Zeigen Sie: Ist $a \in R$ eine Einheit und I ein Ideal von R mit $a \in I$, so gilt $I = R$. (3 Punkte)

(b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die geometrische Summenformel: Für jedes $a \in R$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt (3 Punkte)

$$(1-a)\sum_{i=0}^{n} a^i = 1 - a^{n+1}.$$

(c) *Erinnerung:* Ein Element $a \in R$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $a^n = 0$ gilt. Zeigen Sie: Wenn $a \in R$ nilpotent ist, dann ist $1 - a$ eine Einheit in R. (2 Punkte)

Lösung. (a) Da a eine Einheit in R ist, gibt es $b \in R$ mit $ab = 1$. Da I ein Ideal ist und $a \in I$, gilt auch $1 = ba \in I$. Damit gilt für jedes $c \in R$: $c = c \cdot 1 \in I$; somit ist $I = R$.

(b) Für $n = 1$ gilt $(1-a)(1+a) = 1 - a^2$, wie gewünscht. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung gelte für $n-1$. Es ist also $(1-a)\sum_{i=0}^{n} a^i = (1-a)(\sum_{i=0}^{n-1} a^i + a^n) = (1-a)\sum_{i=0}^{n-1} a^i + (1-a)a^n = 1 - a^n + (1-a)a^n = 1 - a^{n+1}$. Dabei gilt die vorletzte Gleichheit nach Induktionsvoraussetzung.

(c) Sei $a \in R$ mit $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Nach (b) gilt dann $(1-a)\sum_{i=0}^{n-1} = 1$. Mit anderen Worten, $\sum_{i=0}^{n-1} a^i$ ist ein multiplikatives Inverses von $1-a$, so dass $1-a$ eine Einheit ist. $\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 5 **(9 Punkte)**

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, und sei A die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei φ_A der durch A beschriebene Endomorphismus $\varphi_A(x) = Ax$ von $\mathbb{R}^2$ und β_A die durch A beschriebene Bilinearform $\beta_A(x,y) = x^t A y$ auf $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie alle Werte von λ und μ, für die A diagonalisierbar ist, d.h. für die es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$ gibt derart, dass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A)$ Diagonalgestalt besitzt. (5 Punkte)

(b) Bestimmen Sie alle Werte von λ und μ, für die es eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^2$ gibt derart, dass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\beta_A)$ Diagonalgestalt besitzt. (4 Punkte)

Die Antwort ist jeweils zu begründen.
Hinweis: Es ist nicht verlangt (aber auch nicht verboten), die Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ explizit zu bestimmen.

Lösung. (a) Notwendig für Diagonalisierbarkeit einer Matrix ist, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Wir berechnen $P_A(T) = T^2 - \lambda\mu$. Wenn λ und μ das gleiche Vorzeichen haben und beide ungleich 0 sind, dann ist also $\lambda\mu > 0$, und A hat die verschiedenen Eigenwerte $\sqrt{\lambda\mu}, -\sqrt{\lambda\mu}$. Dann ist A diagonalisierbar. Haben λ, μ verschiedene Vorzeichen und sind beide ungleich 0, so hat $P_A(T)$ keine Nullstellen, so dass A nicht diagonalisierbar ist. Es bleibt der Fall, dass $\lambda\mu = 0$ ist. Sind λ, μ beide Null, so ist A die Nullmatrix und bereits diagonal. Ist λ oder μ ungleich 0, dann kann A nicht diagonalisierbar sein, denn die Eigenwerte sind 0, die Matrix A aber nicht.
Wenn man möchte, kann man für $\lambda\mu > 0$ auch noch eine Basis aus Eigenvektoren bestimmen. Man erhält etwa $\mathcal{B} = \big((\sqrt{\lambda}, \sqrt{\mu})^t, (\sqrt{\lambda}, -\sqrt{\mu})^t\big)$.

(b) *Erste Möglichkeit:* Ist $\lambda = \mu$, so ist β_A eine symmetrische Bilinearform. Daher gibt es eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^2$ für β_A nach Vorlesung. Bezüglich dieser hat die darstellende Matrix Diagonalgestalt. Ist $\lambda \neq \mu$, so ist die Bilinearform β_A nicht symmetrisch. Dann kann sie auch nicht durch eine Diagonalmatrix dargestellt werden, denn die Eigenschaft symmetrisch zu sein, hängt nicht von der Wahl einer Basis ab und die durch eine Diagonalmatrix dargestellte Bilinearform ist automatisch symmetrisch.

Zweite Möglichkeit: Sei

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine invertierbare Matrix, d.h. $\det(T) = ad - bc \neq 0$. Wir wollen solches T finden derart, dass $T^t A T$ Diagonalgestalt hat. Das führt nach Ausmultiplizieren auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} ad\lambda + bc\mu &= 0 \\ ad\mu + bc\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen wissen, für welche Werte von λ und μ diese Gleichungen in a, b, c, d lösbar sind, unter der Nebenbedingung $ad - bc \neq 0$. Wir sehen zunächst: Für $\lambda = \mu = 0$ ist nichts zu zeigen. Wenn $\lambda = 0$ ist, dann muss auch $\mu = 0$ sein, denn andernfalls würde $ad = bc = 0$ folgen, im Widerspruch zu $ad - bc \neq 0$. Genauso umgekehrt. Wir können also $\lambda\mu \neq 0$ annehmen. Dann muss auch $ad \neq 0$ und $bc \neq 0$ gelten (sonst wieder $ad = bc = 0$). Wir können also die erste Gleichung nach λ auflösen:

$$\lambda = -\frac{bc}{ad}\mu,$$

in die zweite einsetzen und erhalten:

$$((ad)^2 - (bc)^2)\mu = 0.$$

Dies ist äquivalent zu $ad - bc = 0$ oder $ad + bc = 0$, aber die erste Möglichkeit ist ausgeschlossen. Also folgt $ad = -bc$ und damit $\lambda = \mu$. In diesem Fall ist etwa $a = b = c = 1$, $d = -1$ eine Lösung. Insgesamt sehen wir, dass die gesuchte Basis genau im Fall $\lambda = \mu$ existiert.

$\square$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 6 **(10 Punkte)**

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und β eine symmetrische Bilinearform auf V. Sei U ein Untervektorraum von V und definiere

$$U^\perp = \{v \in V\ ;\ \forall u \in U\colon \beta(v,u) = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie: $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von V, und es gilt $U \subset (U^\perp)^\perp$. (2 Punkte)
(b) Zeigen Sie: Für zwei Untervektorräume U_1, U_2 von V gilt $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$. (2 Punkte)
(c) Sei β die Bilinearform (3 Punkte)

$$\beta(x,y) = x^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y, \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$

auf $\mathbb{R}^2$. Finden Sie einen Untervektorraum U von $\mathbb{R}^2$, für den $U \neq (U^\perp)^\perp$ gilt.
(d) Sei V endlich-dimensional. Zeigen Sie: Ist β nicht-ausgeartet auf V und nicht-ausgeartet auf U, so gilt $(U^\perp)^\perp = U$.
(*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass β auch auf $U^\perp$ nicht-ausgeartet ist.) (3 Punkte)

Lösung. (a) Sind $v, w \in U^\perp$, so gilt $\beta(v+w,u) = \beta(v,u) + \beta(w,u) = 0$ für alle $u \in U$, also $v + w \in U^\perp$. Genauso gilt $\beta(\lambda v, u) = \lambda\beta(v,u) = 0$ für alle $u \in U$, also $\lambda v \in U^\perp$ für alle $\lambda \in K$. Ferner gilt $0 \in U^\perp$. Damit ist gezeigt, dass $U^\perp$ ein Unterraum ist. Ist $u \in U$ und $w \in U^\perp$, so ist $\beta(u,w) = \beta(w,u) = 0$, da β symmetrisch ist. Also gilt $u \in (U^\perp)^\perp$.

(b) Ist $v \in (U_1 + U_2)^\perp$, so bedeutet das $\beta(v, u_1 + u_2) = 0$ für alle $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Insbesondere gilt das auch für $u_1 = 0$ oder $u_2 = 0$. Also folgt $\beta(v,u_1) = 0$ und $\beta(v,u_2) = 0$ für alle $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Also $v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$. Ist umgekehrt $v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$, so folgt $\beta(v, u_1 + u_2) = \beta(v,u_1) + \beta(v,u_2)$ für alle $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Also gilt $v \in (U_1 + U_2)^\perp$.

(c) Sei U der von $e_1 = (1,0)^t$ erzeugte Unterraum. Dann gilt $U^\perp = \{(x_1,x_2)^t \in \mathbb{R}^2\ ;\ x_1 = x_2\} = \mathrm{Lin}(e_1 + e_2) = \mathrm{Lin}\big((1,1)^t\big)$. Nun ist $(U^\perp)^\perp = \mathbb{R}^2 \neq U$. (Es gibt auch weitere Beispiele.)

(d) Weil β auf U nicht ausgeartet ist und U endlich-dimensional, gilt laut Vorlesung $V = U \oplus U^\perp$. Da β auf V nicht ausgeartet ist, folgt nun, dass β auch auf $U^\perp$ nicht ausgeartet ist. Denn angenommen es gäbe $0 \neq w_0 \in U^\perp$ mit $\beta(w_0, w) = 0$ für alle $w \in U^\perp$. Ist dann $v \in V$, so schreibe $v = u + w$ mit $u \in U$, $w \in U^\perp$, dann folgt $\beta(w_0, v) = \beta(u,v) + \beta(w,v) = 0$. Also ist $\beta(w_0,v) = 0$ für alle $v \in V$, ein Widerspruch.
Damit gilt nun auch $V = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp$. Wir haben also zwei Zerlegungen $V = U \oplus U^\perp = (U^\perp)^\perp \oplus U^\perp$, und $U \subset (U^\perp)^\perp$. Dann folgt $(U^\perp)^\perp \subset U$. Denn ist $w \in (U^\perp)^\perp$, so können wir $w = u + v$ mit $u \in U$, $v \in U^\perp$ schreiben. Wegen $u \in U \subset (U^\perp)^\perp$ folgt $v = w - u \in (U^\perp)^\perp$. Damit $v \in U^\perp \cap (U^\perp)^\perp$, also $v = 0$ und somit $w = u \in U$. □