Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Daniel Plaumann
Sommersemester 2008

# LINEARE ALGEBRA II

1. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 25. April 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

Im folgenden sei $K$ immer ein Körper.

**1.** Sei $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$. Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie unter Verwendung von Sätzen aus der Vorlesung, dass $A$ nicht diagonalisierbar ist.
(b) Zeigen Sie direkt durch Nachrechnen, dass es keine invertierbare $2 \times 2$-Matrix $T$ gibt, für die $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat.

**2.** Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix (d.h. es gelte $A^t = A$). Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $A$ (aufgefasst als Matrix über $\mathbb{C}$). Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

**3.** Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum der Dimension $n < \infty$, und sei $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Sei $0 \leq d \leq n$ eine natürliche Zahl.

(a) Beweisen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
(i) Es gibt einen $d$-dimensionalen Unterraum $U$ von $V$ mit $\varphi(U) \subset U$.
(ii) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$ und Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(K)$, $B_1 \in \mathrm{Mat}_{d\times(n-d)}(K)$ und $B_2 \in \mathrm{Mat}_{(n-d)\times(n-d)}(K)$ mit

$$\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} A & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie weiter: Genau dann gilt die Aussage (ii) mit $B_1 = 0$ wenn in (i) zusätzlich gilt: Es gibt einen Unterraum $U'$ von $V$ mit $\varphi(U') \subset U'$ und $V = U \oplus U'$.

*Bemerkung:* Ein Unterraum $U$ mit $\varphi(U) \subset U$ heißt ein *$\varphi$-invarianter Unterraum* von $V$.

**4.** Es sei $A$ eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in $K$, deren charakteristisches Polynom $P_A$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h. es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $P_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$. (Die $\lambda_i$ müssen aber nicht verschieden sein!) Zeigen Sie, dass $A$ *trigonalisierbar*, d.h. ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist. (*Hinweis:* Aufgabe 50 aus B1 und Induktion nach $n$.)

*Bemerkung:* Insbesondere beweisen Sie hiermit, dass jede Matrix über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen trigonalisierbar ist.