Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Daniel Plaumann
Sommersemester 2008

LINEARE ALGEBRA II

2. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 2. Mai 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

5. Sei R ein Ring, und sei $P \in R[T]$, $P \neq 0$, ein Polynom mit Koeffizienten in R. Zeigen Sie: Genau dann ist $\mathrm{LK}(P)$ ein reguläres Element in R, wenn $\mathrm{grad}(PQ) = \mathrm{grad}(P) + \mathrm{grad}(Q)$ für alle $Q \in R[T]$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass die Aussage genauso richtig ist, wenn man LK durch AK und zugleich grad durch ord ersetzt.

6. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Es sei

$$N := \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

eine obere $n \times n$-Dreiecksmatrix über K, deren sämtliche Diagonaleinträge Null sind (d.h. $N = (a_{ij})$ erfüllt $a_{ij} = 0$ für alle $i \geq j$). Sei $P_N(T)$ das charakteristische Polynom von N. Zeigen Sie den *Satz von Cayley-Hamilton* für N, nämlich dass $P_N(N) = 0$ gilt.
(*Hinweis:* Testen Sie die Aussage zunächst an Beispielen, etwa mit $n = 3$.)

7. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und sei $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})^t \in K^n$. Die *Vandermonde-Matrix* zu a ist die $n \times n$-Matrix

$$V_a := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie die folgende Formel für die *Vandermonde-Determinante:*

$$\det(V_a) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j).$$

8. Sei p eine Primzahl, und sei $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Zeigen Sie, dass jede Funktion $\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ eine Polynomfunktion ist. Genauer: Zeigen Sie, dass zu jeder Funktion $f\colon \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ ein eindeutig bestimmtes Polynom $P \in \mathbb{F}_p[T]$ vom Grad höchstens $p-1$ existiert derart, dass $f(a) = P(a)$ für alle $a \in \mathbb{F}_p$ erfüllt ist.
(*Vorschlag:* Seien $a_1, \ldots, a_p$ sämtliche Elemente von $\mathbb{F}_p$. Gesucht ist ein Polynom P mit $P(a_i) = f(a_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, p\}$. Stellen Sie ein geeignetes lineares Gleichungssytem auf und verwenden Sie Aufgabe 7.
Alternativer Vorschlag: Zeigen Sie zunächst, dass die charakteristischen Funktionen Polynomfunktionen sind.)