Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Daniel Plaumann
Sommersemester 2008

LINEARE ALGEBRA II

3. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 9. Mai 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

Sei stets K ein Körper.

9. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Sei $P \in K[T]$ ein Polynom und $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Zeigen Sie:

$$P(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(P(\varphi)).$$

10. Sei A eine 2×2-Matrix mit Einträgen in K. Zeigen Sie, dass es eine Ebene (d.h. einen 2-dimensionalen Unterraum) des 4-dimensionalen Vektorraums $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$ gibt, die alle Potenzen A^n, $n \geq 0$, von A enthält. (Dabei ist $A^0 := E_2$).
(*Hinweis:* Satz von Cayley-Hamilton)

11. Es sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Sei $P \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom. Zeigen Sie:

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von φ, so ist $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(\varphi)$.
(b) Umgekehrt gibt es zu jedem Eigenwert μ von $P(\varphi)$ einen Eigenwert λ von φ mit $\mu = P(\lambda)$.
(*Hinweis:* Benutzen Sie, dass das Polynom $P - \mu$ in Linearfaktoren zerfällt.)
(c) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Aussage in (b) über den reellen Zahlen falsch ist.

12. Es sei die folgende 5×5-Matrix über K gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A.
(*Hinweis:* Es ist nicht verlangt, den Basiswechsel, der A in seine Jordansche Normalform überführt, explizit zu bestimmen.)