Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Daniel Plaumann
Sommersemester 2008

LINEARE ALGEBRA II

4. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 16. Mai 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

Sei stets K ein Körper.

13. Sei V ein K-Vektorraum, und seien φ, ψ zwei Endomorphismen von V mit $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Zeigen Sie: Ist U ein φ-invarianter Unterraum von V, so ist $\psi(U)$ ebenfalls ein φ-invarianter Unterraum. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass diese Aussage im Fall $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$ im allgemeinen falsch ist. (*Hinweis:* Versuchen Sie es mit $V = K^2$).

14. Es sei A eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Zeigen Sie:

(a) Ist $P \in K[T]$, $P \neq 0$, ein Polynom vom Grad d mit $P(A) = 0$ und d minimal mit dieser Eigenschaft (d.h. für jedes Polynom $Q \in K[T]$, $Q \neq 0$, mit $Q(A) = 0$ gilt $\deg(Q) \geq d$), so gilt für jedes Polynom $Q \in K[T]$:
$$Q(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad P|Q.$$
Gilt zusätzlich $\mathrm{LK}(P) = 1$, so heißt P ein *Minimalpolynom* von A.

(b) Es gibt genau ein Minimalpolynom von A (genannt folglich *das* Minimalpolynom von A).

15. Seien V, W zwei K-Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$, $\psi\colon W \to V$ lineare Abbildungen mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$.

(a) Zeigen Sie: $(\psi \circ \varphi)^2 = \psi \circ \varphi$.

(b) Was lässt sich über die Injektivität bzw. Surjektivität von φ und ψ sagen?

(c) Zeigen Sie: $V = \mathrm{Kern}(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\psi)$

16. Betrachten Sie die Teilmenge
$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix} ;\ w, z \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}),$$
wobei $\overline{z}$ die zu z komplex-konjugierte Zahl bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{H}$ einen Teilring von $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ bildet.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Element ungleich 0 in $\mathbb{H}$ ein multiplikatives Inverses besitzt.

(c) Seien
$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass die Elemente $\mathbb{1}, I, J, K$ eine Basis von $\mathbb{H}$ über $\mathbb{R}$ bilden und stellen Sie alle paarweisen Produkte $I^2, J^2, K^2, IJ, IK, JI, JK, KI, KJ$ in dieser Basis dar.

(d) Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $X \mapsto \overline{X}$, die für ein Element $X = a\mathbb{1} + bI + cJ + dK$ durch $\overline{X} = a\mathbb{1} - bI - cJ - dK$ gegeben ist. Berechnen Sie $X\overline{X}$. Schreiben Sie das Inverse X^{-1} für $X \neq 0$ mit Hilfe von $\overline{X}$.

(e) Zeigen Sie: Ein Element $X = a\mathbb{1} + bI + cJ + dK \in \mathbb{H}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, erfüllt genau dann $X^2 = -\mathbb{1}$, wenn $a = 0$ und $b^2 + c^2 + d^2 = 1$ gelten.

Der Ring $\mathbb{H}$ heißt der *Schiefkörper der hamiltonschen Quaternionen.*