Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Daniel Plaumann
Sommersemester 2008

LINEARE ALGEBRA II

5. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 23. Mai 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

Sei stets K ein Körper.

17. Sei $P(T) = (T-1)^3(T+1)^2$.

(a) Welche Jordanschen Normalformen treten bei 5×5-Matrizen mit Einträgen in K auf, deren charakteristisches Polynom P ist.

(b) Zeigen Sie: Zwei 5×5-Matrizen mit dem charakteristischen Polynom P sind genau dann ähnlich, wenn ihre Minimalpolynome übereinstimmen. (*Hinweis:* Zwei Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie dieselbe Jordansche Normalform haben.)

18. Sei $P = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0$ ein normiertes Polynom über K und sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

die zugehörige Begleitmatrix. Zeigen Sie:

(a) Das charakteristische Polynom von A ist P.

(b) Für jeden Eigenwert λ von A hat der zugehörige Eigenraum die Dimension 1.

Wie sieht also die Jordansche Normalform von A für den Fall aus, dass $P(T)$ in Linearfaktoren zerfällt?

19. Zeigen Sie: Jedes Ideal I des Rings $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist ein Hauptideal, d.h. es gibt eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ derart, dass $I = \{na\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ gilt.
Hinweis: Falls $I \neq \{0\}$ ist, betrachten Sie die kleinste positive Zahl in I.

20. Sei $\mathbb{H}$ der Quaternionenschiefkörper mit $\mathbb{R}$-Basis $\mathbb{1}, I, J, K$ wie in Aufgabe 16. Für eine Quaternion $X = a\mathbb{1} + bI + cJ + dK \in \mathbb{H}$, schreibe $s_X = a$ und $v_X = (b, c, d)^t$. (Man nennt s_X den Skalarteil und v_X den Vektorteil der Quaternion X.)

Beweisen Sie die folgenden Formeln für Skalar- und Vektorteil des Produkts XY zweier Quaternionen $X, Y \in \mathbb{H}$:

(i) $s_{XY} = s_X s_Y - \langle v_X, v_Y \rangle$
(ii) $v_{XY} = s_X v_Y + s_Y v_X + v_X \times v_Y$

Dabei bezeichnet $v \times w$ das Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$ und $\langle v, w \rangle$ das Skalarprodukt.