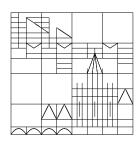
Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik Prof. Dr. Gottfried Barthel Daniel Plaumann Sommersemester 2008



## LINEARE ALGEBRA II

6. Übungsblatt

Abgabe bis spätestens Freitag, den 30. Mai 2008, 10:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten

- **21.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und es bezeichne  $R^{\times}$  die Einheitengruppe von R. Sei  $\mathfrak{a}$  ein Ideal von R. Zeigen Sie: Genau dann gilt  $\mathfrak{a} = R$ , wenn  $\mathfrak{a} \cap R^{\times} \neq \emptyset$  ist.
- **22.** Sei R ein euklidischer Ring, und seien  $a, b \in R$ . Zeigen Sie, dass es Elemente  $r, s \in R$  gibt mit

$$ra + sb = ggT(a, b).$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie die Teilmenge  $M = \{ua + vb \; ; \; u, v \in R\} \subseteq R.$ )

- 23. Sei i die imaginäre Einheit und  $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi; a, b \in \mathbb{Z}\}$  der Ring der gaußschen ganzen Zahlen. Zeigen Sie, dass die Abbildung  $\delta \colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}, \ a+bi \mapsto a^2+b^2$  eine euklidische Wertefunktion und somit  $\mathbb{Z}[i]$  ein euklidischer Ring ist. (*Hinweis:* Für die Division mit Rest zeigen Sie zunächst, dass zu jedem  $z \in \mathbb{C}$  ein  $z' \in \mathbb{Z}[i]$  existiert derart, dass  $|z-z'|^2 \leq \frac{1}{2}$  gilt.)
- **24.** (a) Sei  $r \geq 1$  und seien  $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}$  paarweise teilerfremde ganze Zahlen. Seien  $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$  beliebig. Zeigen Sie, dass es  $x \in \mathbb{Z}$  gibt derart, dass die Kongruenzen

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$
  
 $\vdots$   
 $x \equiv a_r \pmod{m_r}$ 

erfüllt sind.

(*Hinweis*: Setze  $M := m_1 \cdots m_r$  und  $M_i := \frac{M}{m_i}$  für  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Lösen Sie zunächst die Kongruenzen  $M_i x_i \equiv a_i \pmod{m_i}$ .)

(b) Bestimmen Sie eine gemeinsame Lösung x für die Kongruenzen

$$x \equiv 2 \pmod{5}$$

$$x \equiv 1 \pmod{6}$$

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$
.