Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Daniel Plaumann
Sommersemester 2008

LINEARE ALGEBRA II

6. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 30. Mai 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

21. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und es bezeichne $R^\times$ die Einheitengruppe von R. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R. Zeigen Sie: Genau dann gilt $\mathfrak{a} = R$, wenn $\mathfrak{a} \cap R^\times \neq \emptyset$ ist.

22. Sei R ein euklidischer Ring, und seien $a, b \in R$. Zeigen Sie, dass es Elemente $r, s \in R$ gibt mit

$$ra + sb = \mathrm{ggT}(a, b).$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie die Teilmenge $M = \{ua + vb\,;\ u, v \in R\} \subseteq R$.)

23. Sei i die imaginäre Einheit und $\mathbb{Z}[i] = \big\{a+bi; a, b \in \mathbb{Z}\big\}$ der Ring der gaußschen ganzen Zahlen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\delta\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$, $a + bi \mapsto a^2 + b^2$ eine euklidische Wertefunktion und somit $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring ist.
(*Hinweis:* Für die Division mit Rest zeigen Sie zunächst, dass zu jedem $z \in \mathbb{C}$ ein $z' \in \mathbb{Z}[i]$ existiert derart, dass $|z - z'|^2 \leq \frac{1}{2}$ gilt.)

24. (a) Sei $r \geq 1$ und seien $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}$ paarweise teilerfremde ganze Zahlen. Seien $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ beliebig. Zeigen Sie, dass es $x \in \mathbb{Z}$ gibt derart, dass die Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_r \pmod{m_r} \end{aligned}$$

erfüllt sind.
(*Hinweis:* Setze $M := m_1 \cdots m_r$ und $M_i := \frac{M}{m_i}$ für $i \in \{1, \ldots, r\}$. Lösen Sie zunächst die Kongruenzen $M_i x_i \equiv a_i \pmod{m_i}$.)

(b) Bestimmen Sie eine gemeinsame Lösung x für die Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 5 \\ x &\equiv 1 \pmod 6 \\ x &\equiv 3 \pmod 7. \end{aligned}$$