Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Daniel Plaumann
Sommersemester 2008

LINEARE ALGEBRA II

7. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 6. Juni 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

25. Sei $A = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ (mit der punktweisen Addition und Multiplikation). Sei $M \subset [0,1]$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie:

(a) Die Teilmenge $I_M = \{f \in A\,;\, \forall x \in M\colon f(x) = 0\} \subseteq A$ ist ein Ideal.
(b) Sei $a \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass $I_{\{a\}}$ ein Primideal ist.
(c) Seien $a, b \in [0,1]$, $a \neq b$. Zeigen Sie, dass $I_{\{a,b\}}$ kein Primideal ist.
(d) Allgemeiner: Genau dann ist I_M ein Primideal, wenn M ein-elementig ist.

26. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$ der 2×2-Matrizen keine zweiseitigen Ideale außer $\{0\}$ und $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$ besitzt.
(*Hinweis:* Sei $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}$ die Elementarmatrizen $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ enthält.)
Zusatz: Machen Sie sich klar, dass die Aussage auch für $n \geq 3$ richtig ist und sich grundsätzlich mit der gleichen Idee beweisen lässt. (Sie müssen hierzu nichts abgeben.)

27. Sei $\mathbb{H}$ der Quaternionenschiefkörper. Für eine Quaternion $X = a\mathbb{1} + bI + cJ + dK \in \mathbb{H}$, setze $|X| = \sqrt{X\overline{X}}$. Dabei ist $\overline{X}$ die zu X konjugierte Quaternion (vgl. Aufgabe 16 d) und $|X|$ heißt der Betrag von X.

(a) Zeigen Sie für alle $X, Y \in \mathbb{H}$: $\overline{X \cdot Y} = \overline{Y} \cdot \overline{X}$ und $|XY| = |X||Y|$.
(b) Seien $a_1, \ldots, a_4, b_1, \ldots, b_4 \in \mathbb{Z}$ und setze $x = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$, $y = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2$. Zeigen Sie, dass es $c_1, \ldots, c_4 \in \mathbb{Z}$ gibt derart, dass $xy = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$ gilt. (In Worten: Das Produkt zweier Summen von vier Quadraten ist wieder eine Summe von vier Quadraten).

28. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $\mathrm{Bil}_K(V)$ der Vektorraum aller K-Bilinearformen auf V und $V^* = \mathrm{Hom}(V,K)$ der Dualraum von V. Sei

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathrm{Bil}_K(V) & \to & \mathrm{Hom}(V,V^*) \\ \beta & \mapsto & \{\varphi_\beta\colon v \mapsto \beta(v,-)\} \end{cases}.$$

Dabei ist $\beta(v,-) \in V^*$ die Linearform $w \mapsto \beta(v,w)$. Zeigen Sie, dass φ ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.