Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Daniel Plaumann
Sommersemester 2008

LINEARE ALGEBRA II

8. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 13. Juni 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

Sei stets K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ (d.h. $1 + 1 \neq 0$ in K).

29. Bezüglich der Standardbasis von K^3 sei eine Bilinearform β durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von K^3 derart, dass die darstellende Matrix $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\beta)$ Diagonalgestalt hat.

30. Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome in einer Veränderlichen x vom Grad höchstens 2. Zeigen Sie, dass durch

$$\beta(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

eine Bilinearform auf V gegeben ist und bestimmen Sie die darstellende Matrix von β in Bezug auf die Basis $(1, x, x^2)$.

31. Es sei $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und β eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf V. Für $v, w \in V$ werde ein Endomorphismus $f_{v,w}$ von V durch

$$f_{v,w}(x) = \beta(v, x)w$$

definiert.

(a) Bestimmen Sie den Rang von $f_{v,w}$.
(b) Zeigen Sie: $\mathrm{Spur} f_{v,w} = \beta(v, w)$.
(c) Beweisen Sie: Für zwei Basen $(v_1, \ldots, v_n)$, $(w_1, \ldots, w_n)$ von V ist der Endomorphismus

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_{v_i,w_i}$$

bijektiv.

32. (a) Finden Sie die darstellenden Matrizen der Bilinearformen auf K^2, die zu den quadratischen Formen

$$q_1(x_1, x_2) = x_1^2, \quad q_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2, \quad q_3(x_1, x_2) = 2x_1x_2, \quad q_4(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$$

gehören.

(b) Zeigen Sie: Genau dann gehört die quadratische Form

$$q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

zu einer nicht-ausgearteten symmetrischen Bilinearform auf K^2, wenn

$$b^2 \neq ac$$

gilt.