Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Daniel Plaumann
Sommersemester 2008

LINEARE ALGEBRA II

9. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 20. Juni 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

Sei stets K ein Körper, und seien V, W zwei K-Vektorräume.

33. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Abbildungen β bilinear sind:

(a) $\beta\colon V \times \mathrm{Hom}(V,W) \to W$, $\beta(v,\varphi) := \varphi(v)$.
(b) $\beta\colon V \times V \to V$, $\beta(u,v) := u+v$.
(c) $\beta\colon K^n \times K^n \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, $\beta(x,y) := xy^t$.
(d) $K := \mathbb{R}$, $\beta\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\beta(x,y) := x\overline{y}$.
(e) wie (d) mit $K := \mathbb{C}$.
(f) $K := \mathbb{R}$, $\beta\colon \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $\beta(f,v) := D_v(f)$. (Dabei ist $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ der Raum der (stetig) differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $D_v(f)$ die Ableitung von f in Richtung v.)

34. Seien V und W endlich-dimensional, $\mathcal{B}$ eine Basis von V, $\mathcal{C}$ eine Basis von W. Der *Rang* einer bilinearen Paarung $\beta\colon V\times W \to K$ ist der Rang der Matrix $\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\beta)$, geschrieben $\mathrm{rang}(\beta)$. Zeigen Sie, dass der Rang von β nicht von der Wahl der Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ abhängt.

35. Mit den Bezeichnung der vorigen Aufgabe, sei $\beta_1\colon V \to W^*$, $v \mapsto \beta(v,-)$ und $\beta_2\colon W \to V^*$, $w \mapsto \beta(-,w)$. Sei $\mathcal{B}^*$ die Dualbasis von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}^*$ die Dualbasis von $\mathcal{C}$. Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}^*}(\beta_1)$ und $\mathrm{Mat}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}^*}(\beta_2)$ und folgern Sie

$$\mathrm{rang}(\beta) = \mathrm{rang}(\beta_1) = \mathrm{rang}(\beta_2).$$

36. Seien V und W endlich-dimensional und seien $f \in V^*$, $g \in W^*$ Linearformen. Definiere eine Abbildung $f \otimes g\colon V \times W \to K$ durch

$$(f\otimes g)(v,w) := f(v)\cdot g(w),$$

genannt das *Tensorprodukt* von f und g. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $f\otimes g$ ist bilinear und falls $f,g \neq 0$, so ist $\mathrm{rang}(f\otimes g) = 1$.
(b) Ist $\beta\colon V\times W \to K$ eine bilineare Paarung und $k \in \mathbb{N}$, so sind äquivalent:
   (1) $\mathrm{rang}(\beta) \le k$
   (2) Es gibt Linearformen $f_1,\dots,f_k \in V^*$ und $g_1,\dots,g_k \in W^*$ mit

$$\beta = (f_1\otimes g_1) + \cdots + (f_k \otimes g_k).$$