Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Daniel Plaumann
Sommersemester 2008

LINEARE ALGEBRA II

11. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 4. Juli 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

41. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation und β eine $(1,\sigma)$-bilineare Form $V \times V \to \mathbb{C}$. Für $v \in V$, setze $p(v) := \beta(v,v)$. Zeigen Sie:

$$2\beta(v,w) = p(v+w) + ip(v+iw) - (1+i)\big(p(v)+p(w)\big).$$

42. Sei V ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ und sei $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Zeigen Sie: Gilt $\langle x, f(x) \rangle = 0$ für alle $x \in V$, so ist $f = 0$. (*Hinweis:* Betrachten Sie zu $v, w \in V$ die Vektoren $x = v + w$ und $x = v + iw$).

Zusatz: Gilt die analoge Aussage auch für euklidische Vektorräume?

43. Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die reelle $n \times n$-Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

44. Es sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren $(1,2,0,2)^t$ und $(1,1,1,1)^t$ aufgespannte Unterraum. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für U und eine für $U^{\perp}$.