Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Daniel Plaumann
Sommersemester 2008

LINEARE ALGEBRA II

12. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 11. Juli 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

45. Sei A die reelle symmetrische Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Seien φ_A der durch A bestimmte Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$ und β_A die durch A bestimmte symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$, jeweils bezüglich der kanonischen Basis. Bestimmen Sie Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A)$ und $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\beta_A)$ Diagonalgestalt haben.

46. Entscheiden Sie, ob die folgenden symmetrischen bzw. hermiteschen Matrizen jeweils positiv oder negativ definit oder semidefinit sind:

$$A = \begin{pmatrix} -14 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 13 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

47. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -8 \\ -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie

(a) das charakteristische Polynom von A,
(b) das Minimalpolynom von A,
(c) die Jordansche Normalform von A.

48. Es sei A ein kommutativer Ring mit Eins, der nur ein einziges maximales Ideal besitzt, d.h. es gebe ein Ideal $\mathfrak{m} \neq A$ von A derart, dass $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ für jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq A$ gilt. Zeigen Sie: Die Einheiten von A sind genau die Elemente, die nicht in $\mathfrak{m}$ enthalten sind, d.h. es gilt $A \setminus \mathfrak{m} = A^\times$. (*Hinweis:* Betrachten Sie zu $a \in A \setminus \mathfrak{m}$ das Ideal $(a) = \{ba\,;\, b \in A\}$.)