Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Dr. Daniel Plaumann
Wintersemester 2008/2009

ALGEBRA

1. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 31. Oktober 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

1. (a) Sei $\sim$ eine reflexive Relation auf einer Menge M. Zeigen Sie, dass $\sim$ genau dann symmetrisch und transitiv ist, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:

$$(a \sim b) \wedge (a \sim c) \quad \Longrightarrow \quad b \sim c.$$

(b) Behauptung: Jede symmetrische und transitive Relation auf einer Menge M ist reflexiv.
Beweis: Für alle $a, b \in M$ gilt wegen der Symmetrie $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, also folgt aus der Transitivität $a \sim a$.
Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Behauptung falsch ist. Wo liegt der Fehler im "Beweis"?

2. Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen $\sim$ auf den Mengen M jeweils Äquivalenzrelationen sind. Welche bekannten mathematischen Objekte erkennen Sie in den Äquivalenzklassen?

(a) $M = \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}$; $\quad (a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$
(b) $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$; $\quad (a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$
(c) $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; $\quad x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 : x = \lambda y$

3. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $(a, b) \mapsto a * b := \mathrm{kgV}(a, b)$ eine Monoidstruktur auf den positiven natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_{>0}$ definiert. Stimmt das auch, wenn man kgV durch ggT ersetzt?

4. Sei $(G, \cdot)$ eine nicht-leere Menge mit einer Verknüpfung. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(1) $(G, \cdot)$ ist eine Gruppe.
(2) Die Verknüpfung $\cdot$ ist assoziativ, und für alle $a, b \in G$ existieren $x, y \in G$ mit $a \cdot x = b$ und $y \cdot a = b$.