Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Dr. Daniel Plaumann
Wintersemester 2008/2009

ALGEBRA

2. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 7. November 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

5. Sei $(L, \preceq, \wedge, \vee)$ ein Verband.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:
(1) Für alle $a, b, c \in L$ gilt: $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.
(2) Für alle $a, b, c \in L$ gilt: $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.
(3) Für alle $a, b, c \in L$ gilt: $(a \vee b) \wedge c \preceq a \vee (b \wedge c)$.
Erfüllt L diese Bedingungen, so nennt man L *distributiv*.

(b) Zeigen Sie, dass der Verband auf der fünfelementigen Menge $L = \{a, b, c, m, M\}$, der durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ a \arrow[dr, dash] & b \arrow[d, dash] & c \arrow[dl, dash] \\ & m & \end{tikzcd}$$

gegeben ist, nicht distributiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Teilerverband auf den positiven natürlichen Zahlen (also $(L, \preceq, \wedge, \vee) := (\mathbb{N}_{>0}, |, \mathrm{ggT}, \mathrm{kgV})$) distributiv ist.

6. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie mithilfe des Zornschen Lemmas, dass V eine Basis besitzt, indem Sie den Beweis aus der Vorlesung wie folgt modifizieren: Betrachten Sie die Menge $\mathscr{M}$ aller Erzeugendensysteme von V mit der partiellen Ordnung $\mathcal{E} \preceq \mathcal{E}' \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathcal{E} \supseteqq \mathcal{E}'$ für $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \mathscr{M}$. Zeigen Sie, dass $(\mathscr{M}, \preceq)$ ein maximales Element besitzt und folgern Sie daraus die Behauptung.

Die Aufgabe ist wie angegeben nicht lösbar, da der vorgeschlagene Weg nicht zum Ziel führt.

7. verschoben auf die nächste Woche (siehe Aufgabe 11).

8. verschoben auf die nächste Woche (siehe Aufgabe 12).