Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Dr. Daniel Plaumann
Wintersemester 2008/2009

ALGEBRA

3. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 14. November 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

9. Sei M eine Menge und sei $\rightsquigarrow$ eine reflexive, transitive Relation auf M. Zeigen Sie:

(a) Durch $a \sim b \;:\Leftrightarrow (a \rightsquigarrow b) \wedge (b \rightsquigarrow a)$ wird eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

(b) Sei $A := M/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen und schreibe $[a]$ für die Äquivalenzklasse von $a \in M$. Zeigen Sie, dass

$$[a] \preceq [b] \quad :\Longleftrightarrow \quad a \rightsquigarrow b$$

eine wohldefinierte Ordnungsrelation $\preceq$ auf A ist.

10. Sei $(M, *)$ eine Menge mit einer Verknüpfung. Es gebe ein zweiseitiges neutrales Element, also ein $e \in M$ derart, dass $e * x = x * e = x$ für alle $x \in M$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass das neutrale Element eindeutig bestimmt ist.

(b) Die Verknüpfung $*$ sei assoziativ. Sei $x \in M$. Zeigen Sie, dass für alle $y, y' \in M$ gilt:

$$x * y = x * y' = y * x = y' * x = e \quad \Longrightarrow \quad y = y'$$

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge M mit einer (notwendig nicht assoziativen) Verknüpfung $*$ mit neutralem Element e derart, dass die Implikation in (b) nicht gilt.

11. Sei $(M, *)$ ein kommutatives Kürzungsmonoid mit neutralem Element e. (*Kürzungs*monoid bedeutet, dass für alle $a, b, c \in M$ gilt: $a * b = a * c \implies b = c$). Sei $L := M \times M$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow a * d = b * c$$

eine Äquivalenzrelation auf L definiert ist, die mit der Monoidstruktur verträglich (also eine Kongruenzrelation) ist. (Notation: Schreibe $[a, b]$ für die Kongruenzklasse von $(a, b) \in L$).

(b) Beweisen Sie, dass die Menge $A := L/\sim$ der Kongruenzklassen mit der induzierten Monoid-struktur $[a, b] * [c, d] := [a * c, b * d]$ eine abelsche Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie, dass durch $a \mapsto [a, e]$ ein injektiver Monoidhomomorphismus $M \to A$ gegeben ist.

12. Bestimmen Sie die Gruppe A aus der vorangehenden Aufgabe in den Fällen $(M, *) := (\mathbb{N}, +)$ und $(M, *) := (\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ (vgl. Aufgabe 2).