Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Dr. Daniel Plaumann
Wintersemester 2008/2009

ALGEBRA

4. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 21. November 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

13. (a) Seien $(M, \circ)$ und $(N, *)$ zwei Magmen (Mengen mit Verknüpfungen) und sei $f\colon M \to N$ ein bijektiver Homomorphismus. Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon N \to M$ wieder ein Homomorphismus ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel zweier partiell geordneter Mengen M und N zusammen mit einer bijektiven ordnungstreuen Abbildung $f\colon M \to N$ derart, dass f^{-1} nicht ordnungstreu ist.

14. Sei $(A, \cdot)$ eine kommutative Halbgruppe. Zeigen Sie, dass durch

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists m \in A\colon m \cdot a = m \cdot b \qquad\qquad (a, b \in A)$$

eine Kongruenzrelation auf A definiert ist. Zeigen Sie, dass $B := A/\sim$ eine kommutative Kürzungshalbgruppe ist.

15. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U ein Unterraum von V. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$v \sim w \quad :\Longleftrightarrow \quad v - w \in U \qquad\qquad (v, w \in V)$$

wird eine lineare Kongruenzrelation auf V definiert.

(b) Zeigen Sie umgekehrt, dass es zu jeder linearen Kongruenzrelation $\sim$ auf V einen Unterraum W von V gibt derart, dass $v \sim w \Leftrightarrow v - w \in W$ für alle $v, w \in V$ gilt.

(c) Sei V/U der Quotientenvektorraum von V nach U, also der Vektorraum der Kongruenzklassen bzgl. der Kongruenzrelation in (a). Schreibe $\overline{v}$ für die Kongruenzklasse von v in V/U, und sei φ die lineare Abbildung $V \to V/U$, $v \mapsto \overline{v}$. Zeigen Sie: Ist U' ein Komplement von U in V (d.h. $U + U' = V$, $U \cap U' = \{0\}$), so ist $\varphi|_{U'}\colon U' \to V/U$ ein Isomorphismus.

16. Sei $(A, \cdot)$ eine Halbgruppe und schreibe ${}_a\tau$ (bzw. τ_a) für die Links- (bzw. Rechts-)Translation ${}_a\tau(b) = a \cdot b$ (bzw. $\tau_a(b) = b \cdot a$) mit a.

(a) Zeigen Sie: Ist A ein Monoid mit neutralem Element 1, so hat $a \in A$ genau dann ein Linksinverses, wenn ${}_a\tau$ injektiv und τ_a surjektiv ist.

(b) Welche bekannte Eigenschaft hat die Halbgruppe A, wenn ${}_a\tau$ und τ_a für alle $a \in A$ injektiv sind?

(c) Welche bekannte Eigenschaft hat die Halbgruppe A, wenn ${}_a\tau$ und τ_a für alle $a \in A$ surjektiv sind?