Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Dr. Daniel Plaumann
Wintersemester 2008/2009

ALGEBRA

5. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 28. November 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

17. Seien M, N Monoide. Zeigen Sie, dass jeder surjektive Halbgruppenhomomorphismus von M nach N ein Monoidhomomorphismus ist.

18. (a) Seien M, N Halbgruppen und sei $\sim$ eine Kongruenzrelation auf M. Sei $f\colon M \to N$ ein (Halbgruppen)-Homomorphismus, der mit $\sim$ verträglich ist, d.h. es gelte

$$x \sim y \quad\Longrightarrow\quad f(x) = f(y).$$

Zeigen Sie, dass durch $\widetilde{f}([x]) = f(x)$ $(x \in M)$ ein Homomorphismus $\widetilde{f}\colon M/\sim\, \to N$ gegeben ist. (Dabei ist $[x]$ die Kongruenzklasse von $x \in M$ in $M/\sim$.)

(b) Sei M eine Halbgruppe und seien $\sim$, $\approx$ Kongruenzrelationen auf M mit

$$x \sim y \quad\Longrightarrow\quad x \approx y.$$

Sei $[x]_\sim$ die Kongruenzklasse von $x \in M$ bezüglich $\sim$. Zeigen Sie, dass durch

$$[x]_\sim \equiv [y]_\sim \quad :\Longleftrightarrow \quad x \approx y$$

eine wohldefinierte Kongruenzrelation auf $M/\sim$ erklärt ist, und geben Sie explizit einen Isomorphismus zwischen den Halbgruppen $M/\approx$ und $(M/\sim)/\equiv$ an.

19. Sei $\tau_{1,2} \in S_3$ die Transposition

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

und sei U die Untergruppe $\{\mathrm{id}, \tau_{1,2}\}$ von S_3.

(a) Bestimmen und vergleichen Sie die Rechts- bzw. Linksnebenklassen $U\sigma$ bzw. σU $(\sigma \in S_3)$ von U in S_3.

(b) Sei $\sim$ die Relation $\sigma \sim \tau \;\Leftrightarrow\; \sigma^{-1}\tau \in U$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenz- aber keine Kongruenzrelation auf S_3 ist.

20. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Monoiden und sei $M := \prod_{i\in I} M_i$ ihr kartesisches Produkt (mit der komponentenweise definierten Verknüpfung). Definiere für jedes $k \in I$ die (Monoid-)Homomorphismen

$$\pi_k\colon M \to M_k; \quad (m_i)_{i\in I} \mapsto m_k$$
$$\iota_k\colon M_k \to M; \quad a \mapsto (m_i)_{i\in I} \text{ mit } m_k = a \text{ und } m_i = 1 \text{ für } i \neq k.$$

(Dabei bezeichnet 1 jeweils das neutrale Element in jedem M_i). Die π_k heißen die *Projektionen*, die ι_k die *Inklusionen*. Zeigen Sie:

(a) Zu jedem Monoid L und jeder Familie $f_i\colon L \to M_i$ $(i \in I)$ von Homomorphismen gibt es genau einen Homomorphismus $f\colon L \to M$ mit $\pi_k \circ f = f_k$ für alle $k \in I$.

(b) Sei $I = \{1, \ldots, n\}$ endlich und seien alle M_i kommutativ. Zu jedem kommutativen Monoid L und jeder Familie $g_i\colon M_i \to L$ $(i \in I)$ von Homomorphismen gibt es genau einen Homomorphismus $g\colon M \to L$ mit $g \circ \iota_k = g_k$ für alle $k \in I$. (Warum sind die zusätzlichen Voraussetzungen gegenüber (a) notwendig?)