Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Dr. Daniel Plaumann
Wintersemester 2008/2009

ALGEBRA

6. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 5. Dezember 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

21. Zeigen Sie, dass die Gruppen S_3 und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ isomorph sind.

22. Zeigen Sie, dass alle Automorphismen der Gruppe S_3 innere Automorphismen sind, d.h.: Gegeben einen Automorphismus $f\colon S_3 \to S_3$, finden Sie ein Element $\rho \in S_3$ mit $f(\pi) = \rho\pi\rho^{-1}$ für alle $\pi \in S_3$.

23. Überprüfen Sie in jedem der folgenden Beispiele, ob H ein Normalteiler der Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist:

(a) $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \big\{A \in G\,;\ \det(A) = 1\big\}$;
(b) $H = \big\{A \in G\,;\ A \text{ ist diagonal}\big\}$;
(c) $H = \big\{\lambda \cdot E_3\,;\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\}$;
(d) $H = \big\{A \in G\,;\ A \text{ ist diagonalisierbar}\big\}$.

24. Sei G eine Gruppe, und sei N ein Normalteiler von G.

(a) Zeigen Sie: Ist H eine charakteristische Untergruppe von N, so ist H ein Normalteiler von G.
(b) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass ein Normalteiler von N nicht immer ein Normalteiler von G sein muss.
Vorschlag: Suchen Sie geeignete Untergruppen der Gruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ;\ a, b, c \in \mathbb{F}_2 \right\},$$

mit der Matrizenmultiplikation. (G heißt die *Heisenberggruppe* mit Einträgen in $\mathbb{F}_2$.)