Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Dr. Daniel Plaumann
Wintersemester 2008/2009

ALGEBRA

7. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 12. Dezember 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

25. Sei K ein Körper, $K^\times$ die multiplikative Gruppe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$.
Betrachten Sie die folgenden Operationen einer Gruppe G auf einer Menge X:

(1) $G = (K^2, +)$, $X = K^2$;
$(a, x) \mapsto a + x$ (für $a \in G$, $x \in X$).

(2) $G = K^\times \times K^\times$, $X = K^2$;
$\big((\alpha_1, \alpha_2), (x_1, x_2)^t\big) \mapsto (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2)^t$; (für $(\alpha_1, \alpha_2) \in G$, $x = (x_1, x_2)^t \in X$).

(3) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} ; a, b \in K, a \neq 0 \right\}$ mit der Matrizenmultiplikation, $X = K^2 \setminus \{0\}$;
$(A, x) \mapsto Ax$; (für $A \in G$, $x \in X$).

(4) $G = \mathrm{GL}_2(K)$,
$X = \big\{\ell_v \,;\, v \in K^2 \setminus \{0\}\big\}$ die Menge der Ursprungsgeraden $\ell_v = \{\lambda v \,;\, \lambda \in K\}$ in K^2;
$(A, \ell_v) \mapsto \ell_{Av}$ (für $A \in G$, $v \in K^2$).

Beantworten Sie die folgenden Fragen in den Beispielen (1)-(4):

(a) Was ist die Bahn $Gx = \{gx \,;\, g \in G\}$ eines Punkts $x \in X$?
(b) Was ist der Stabilisator $G_x = \{g \in G \,;\, gx = x\}$ eines Punkts $x \in X$?
(c) Welches sind die Fixpunkte $X^g = \{x \in X \,;\, gx = x\}$ eines Elements $g \in G$?
(d) Ist die Operation von G auf X transitiv/effektiv/frei?

26. Sei G eine Gruppe, Z ihr Zentrum. Zeigen Sie: Ist G/Z zyklisch, so ist G abelsch (und damit G/Z bereits einelementig). (*Hinweis:* Zeigen Sie, dass es $a \in G$ gibt derart, dass jedes $g \in G$ als $g = a^r z$ mit $r \in \mathbb{Z}$ und $z \in Z$ geschrieben werden kann.)

27. Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass jede Untergruppe vom Index 2 in G normal ist.

28. Sei G eine Gruppe, und sei N ein Normalteiler in G mit $\mathrm{ggT}(|N|, [G : N]) = 1$.
Zeigen Sie: Ist $g \in G$ ein Element, dessen Ordnung ein Teiler von $|N|$ ist, so folgt $g \in N$. (Dabei ist $|N|$ die Anzahl der Elemente von N und $[G : N]$ der Index von N in G).