Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Dr. Daniel Plaumann
Wintersemester 2008/2009

ALGEBRA

8. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 9. Januar 2009, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

29. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass sich jedes Element von S_n ($n \geq 1$) als ein Produkt von disjunkten Zykeln schreiben lässt. Bestimmen Sie eine solche Zykelzerlegung in den folgenden Beispielen in S_9:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 9 & 7 & 1 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 6 & 5 & 3 & 7 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

30. Sei $n \geq 1$, $\sigma \in S_n$. Schreibe $\sigma = \zeta_1 \cdots \zeta_k$ als Produkt von disjunkten Zykeln ($k \geq 0$). Der *Zykeltyp von* σ ist das Tupel $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{N}^n$, wobei r_i die Anzahl der i-Zykel unter den $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ ist. Zum Beispiel hat $(123)(45) \in S_5$ den Zykeltyp $(0,1,1,0,0)$, weiter $(12)(45)$ den Zykeltyp $(1,2,0,0,0)$ usf.

(a) Zeigen Sie, dass der Zykeltyp wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Darstellung von σ als Produkt von disjunkten Zykeln abhängt.

(b) Zeigen Sie, dass zwei Elemente von S_n genau dann konjugiert sind, wenn sie den gleichen Zykeltyp besitzen.

31. Vervollständigen Sie die in der Vorlesung vom 15.12. als Beispiel skizzierte Untersuchung der Primitivwurzeln und der diskreten Exponentialfunktion zu $p = 13$: Bestätigen Sie, dass $g = 2$ eine Primitivwurzel ist; begründen Sie, dass $g = 6, 7, 11$ die einzigen anderen Primitivwurzeln sind; komplettieren Sie die Wertetabelle der diskreten Exponentialfunktion $k \mapsto g^k$; begründen Sie, dass diese Funktionen, bei der üblichen Identifikation von $\mathbb{F}_p^*$ mit $\{1, \ldots, p-1\}$, Permutationen dieser Menge sind, und bestimmen Sie Zykelzerlegung und Zykeltypen.

32. Eine Gruppe G operiere auf einer Menge X.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $x \in X$ gibt es eine Bijektion von der Bahn Gx auf die Menge der Linksnebenklassen von G_x in G.

(b) Folgern Sie: Ist G endlich, so gilt für alle $x \in X$:

$$|G| = |Gx| \cdot |G_x|$$