Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Dr. Daniel Plaumann
Wintersemester 2008/2009

ALGEBRA

9. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 16. Januar 2009, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

33. Sei G eine endliche Gruppe, und seien $C_1, \dots, C_m$, die Konjugationsklassen von G mit $|C_i| \geq 2$ ($m \geq 0$). Für jedes $g \in G$ sei $Z_G(g) = \{h \in G\,;\, gh = hg\}$ der *Zentralisator von g in G*. Sei $g_i \in C_i$ für $i = 1, \dots, m$. Beweisen Sie die *Klassengleichung*

$$|G| = Z(G) + \sum_{i=1}^{m} [G : Z_G(g_i)].$$

34. Sei p eine Primzahl, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, und sei G eine endliche Gruppe der Ordnung p^n (eine *p-Gruppe*) mit neutralem Element 1. Zeigen Sie:

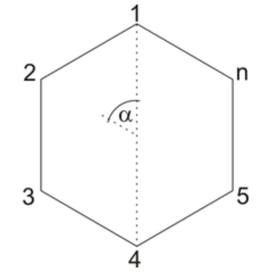
(a) Es gilt $Z(G) \neq \{1\}$.
(b) Ist $n = 2$, so ist G abelsch. (*Hinweis:* Aufgabe 26)

35. Sei G eine Gruppe. Für $g, h \in G$, definiere $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, den *Kommutator* von g und h. Die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe von G heißt die *Kommutatorgruppe von G* und wird mit G' bezeichnet. (Explizit ist $G' = \{[g_1, h_1] \cdots [g_r, h_r]\,;\, g_1, \dots, g_r, h_1, \dots, h_r \in G, r \in \mathbb{N}\}$; Begründung?)
Zeigen Sie:

(a) Es gilt $G' = \{1\}$ genau dann, wenn G abelsch ist.
(b) Ist A eine abelsche Gruppe und $\varphi\colon G \to A$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt $G' \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$.
(c) G' ist eine charakteristische Untergruppe von G.
(d) Der Quotient G/G' ist eine abelsche Gruppe.

36. Sei $n \geq 3$. Die *n-te Diedergruppe D_n* ist die Symmetriegruppe aller Drehungen und Spiegelungen eines regulären n-Ecks. (Ein reguläres n-Eck besteht aus den Verbindungsstrecken von n Punkten gleichen Abstands auf einem Kreis, also etwa der Punkte $e^{\frac{2\pi i}{k}}$, $k = 1, \dots, n$, auf der Einheitskreislinie in der komplexen Ebene). Explizit wird D_n erzeugt von der Drehung a um den Winkel $\frac{2\pi}{k}$ und der Spiegelung b an einer Symmetrieachse des n-Ecks.

(a) Machen Sie sich anschaulich klar, dass die Regeln $a^n = b^2 = \mathrm{id}$ und $bab = a^{-1}$ gelten. (Sie müssen hierzu nichts aufschreiben.)
(b) Zeigen Sie durch Benutzung der Regeln aus (a), dass jedes Element von G (also jedes Wort in a und b) als $a^i b^j$ mit $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $j \in \{0, 1\}$ geschrieben werden kann. Diese Elemente sind alle verschieden. Folgern Sie, dass $|D_n| = 2n$ gilt.
(c) Bestimmen Sie das Zentrum von D_n.
(d) Bestimmen Sie die Kommutatorgruppe von D_4 (*Hinweis:* 35(b)).



reguläres 6-Eck
(Bild aus Wikipedia)