Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Dr. Daniel Plaumann
Wintersemester 2008/2009

ALGEBRA

10. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 23. Januar 2009, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

37. Sei G eine Gruppe, und seien H_1, H_2 zwei Untergruppen von G. Das *Komplexprodukt von H_1 und H_2* ist die Menge $H_1H_2 = \{h_1h_2\ ;\ h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$ aller Produkte von Elementen aus H_1 und H_2. Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist H_1H_2 eine Untergruppe von G, wenn $H_1H_2 = H_2H_1$ gilt. (Beachten Sie, dass hier eine Gleichheit von Mengen steht. $H_1H_2 = H_2H_1$ soll also nicht bedeuten, dass alle Elemente von H_1 mit denen von H_2 kommutieren!)

(b) Ist N ein Normalteiler von G, so gilt $HN = NH$ für alle Untergruppen H von G.

(c) Sind H, N Untergruppen von G mit N normal, so gibt es einen Gruppenisomorphismus

$$HN/N \cong H/(H \cap N).$$

(*Hinweis:* Wenden Sie den allgemeinen Isomorphiesatz $G/\mathrm{Kern}(\varphi) \cong \mathrm{Bild}(\varphi)$, der für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to G'$ gilt, geeignet an.)

38. (a) Bestimmen Sie alle Konjugationsklassen der alternierenden Gruppe A_4.

(b) Bestimmen Sie die Kommutatorgruppe von A_4.

(c) Zeigen Sie, dass A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt. (*Vorschlag:* Verwenden Sie 35(b) und 27.)

39. Sei $Q_8 = \{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$ die Quaternionengruppe der Ordnung 8. Zeigen Sie:

(a) Q_8 ist nicht abelsch, aber jede Untergruppe von Q_8 ist normal.

(b) Q_8 ist nicht isomorph zur Diedergruppe D_4.

40. (a) Beweisen Sie den *Satz von Cauchy:* Sei G eine endliche Gruppe und sei p ein Primteiler von $|G|$. Dann gibt es ein Element der Ordnung p in G.
(*Anleitung:* Sei X die Menge aller p-Tupel $(g_1, \ldots, g_p) \in G^p$ mit $g_1 \cdots g_p = 1$. Die zyklische Gruppe C_p der Ordnung p operiert auf X durch zyklische Permutation, d.h. ist $C_p = \{1, a, a^2, \ldots, a^{p-1}\}$, so wirkt der Erzeuger a auf ein Tupel in X durch $a \cdot (g_1, g_2, \ldots, g_p) = (g_p, g_1, \ldots, g_{p-1})$. Was lässt sich über die Fixpunkte dieser Operation sagen?)

(b) Fassen Sie in eigenen Worten zusammen, was der Satz von Lagrange, der Satz von Cauchy und das Beispiel in 38(c) über den Zusammenhang von Untergruppen und Teilern der Gruppenordnung einer endlicher Gruppe aussagen.