Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Dr. Daniel Plaumann
Wintersemester 2008/2009

ALGEBRA

11. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 30. Januar 2009, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

41. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass zwei Permutationen in der alternierenden Gruppe A_n, die mindestens zwei Fixpunkte haben, genau dann konjugiert sind, wenn sie den gleichen Zykeltyp haben.

42. Beweisen Sie, dass jede nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 6 isomorph zu S_3 ist.

43. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins ($1 \neq 0$), und sei $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie:

(a) Die Quotientengruppe R/I der additiven Gruppen wird durch die Multiplikation

$$(r + I)(s + I) := rs + I \qquad (r, s \in R)$$

wieder zu einem Ring, genannt der *Restklassenring von R nach I*.
(b) Genau dann ist I ein Primideal, wenn R/I nullteilerfrei ist.
(c) Genau dann ist I ein maximales Ideal, wenn R/I ein Körper ist.
(d) Jedes maximale Ideal ist prim.

44. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und seien $I_1, \ldots, I_r$ Ideale von R ($r \geq 2$) mit $I_i + I_j = R$ für alle $i \neq j$.

(a) Zeigen Sie: Für alle $x_1, x_2 \in R$ gibt es $y \in R$ mit

$$\begin{aligned} y + I_1 &= x_1 + I_1 \\ y + I_2 &= x_2 + I_2. \end{aligned}$$

(*Hinweis:* Wählen Sie $a_1 \in I_1$, $a_2 \in I_2$ mit $a_1 + a_2 = 1$.)
(b) Zeigen Sie: Es gilt $I_1 + \bigcap_{j=2}^{r} I_j = R$. (*Hinweis:* Zeigen Sie $1 \in I_1 + \bigcap_{j=2}^{r} I_j$.)
(c) Beweisen Sie durch Induktion die folgende Verallgemeinerung von (a): Für alle $x_1, \ldots, x_r \in R$ gibt es $y \in R$ derart, dass für alle $j = 1, \ldots, r$ gilt:

$$y + I_j = x_j + I_j.$$

(d) Was hat die Aussage in (c) mit dem chinesischen Restsatz der Zahlentheorie (BII, Blatt 6, Aufgabe 24) zu tun?