Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Dr. Daniel Plaumann
Wintersemester 2008/2009

ALGEBRA

12. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 6. Februar 2009, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.

45. Sei $\mathfrak{a}$ das Ideal $(3, 1+\omega)$ im Ring $\mathbb{Z}[\omega]$, $\omega = \sqrt{-5}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}$ kein Hauptideal ist.
(b) Bestimmen Sie den Restklassenring $\mathbb{Z}[\omega]/\mathfrak{a}$ und zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist. (*Hinweis:* Gehen Sie schrittweise vor: Es gilt $\mathbb{Z}[\omega]/\mathfrak{a} \cong \big(\mathbb{Z}[\omega]/(1+\omega)\big)/(3)$.)

46. Sei R ein Ring, U eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R und $\varphi\colon R \to R[U^{-1}]$ die Abbildung $r \mapsto \frac{r}{1}$. Zeigen Sie, dass φ genau dann injektiv ist, wenn U keine Nullteiler enthält.

47. Sei R ein Ring, $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Setze $U = R \setminus \mathfrak{p}$ und schreibe $R_\mathfrak{p} = R[U^{-1}]$. Beweisen Sie, dass
$$\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \left\{ \frac{r}{s} \,;\, r \in \mathfrak{p}, s \in U \right\}$$
das einzige maximale Ideal von $R_\mathfrak{p}$ ist. (Ein Ring, der nur ein einziges maximales Ideal besitzt, heißt ein *lokaler Ring*, und $R_\mathfrak{p}$ heißt daher die *Lokalisierung* von R in $\mathfrak{p}$.)

48. Ein Integritätsring R erfüllt die *aufsteigende Kettenbedingung für Hauptideale*, wenn jede aufsteigende Kette von Hauptidealen stationär wird, d.h. wenn folgendes gilt: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine Folge von Elementen in R mit
$$(a_1) \subseteq (a_2) \subseteq (a_3) \subseteq \cdots$$
so gibt es einen Index $n \in \mathbb{N}_{>0}$ derart, dass $(a_i) = (a_{i+1})$ für alle $i \geq n$ gilt.

Zeigen Sie:

(a) Jeder faktorielle Integritätsring erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung für Hauptideale.
(b) In einem Integritätsring R, der die aufsteigende Kettenbedingung für Hauptideale erfüllt, ist jedes Element ein Produkt von irreduziblen Elementen.
(*Anleitung:* Nehmen Sie an, es gäbe $a_1 \in R$, das kein Produkt von irreduziblen Elementen ist (insbesondere selbst nicht irreduzibel), und definieren Sie induktiv eine Folge $(a_1) \subseteq (a_2) \subseteq (a_3) \subseteq \cdots$ von Hauptidealen, die nicht stationär wird.)
(c) Folgerung: Ein Integritätsring R ist genau dann faktoriell, wenn jedes irreduzible Element in R prim ist und R die aufsteigende Kettenbedingung für Hauptideale erfüllt.