LIE-GRUPPEN

Skript zur Vorlesung an der Universität Konstanz
im Sommersemester 2012

Daniel Plaumann

VORWORT

Die Vorlesung, der dieses Skript entstammt, wurde im Sommersemester 2012 an der Universität Konstanz gehalten. Ziel war eine Einführung in die Theorie der Matrix-Lie-Gruppen verbunden mit einem Einblick in die allgemeine Lie-Theorie. Über weite Teile habe ich mich dabei an dem Buch von Hall [3] orientiert. Die Vorlesung war zweistündig, begleitet von einer zweistündigen Übung. Die Teilnehmer waren etwa zehn Stundentinnen und Studenten in unterschiedlichen Phasen (Bachelor bis Promotion). Das Skript zur Vorlesung wurde in jeder Sitzung zu Beginn zur Verfügung gestellt. Im wesentlichen entspricht jeder Abschnitt genau einer Doppelstunde (90 Minuten), was allerdings nicht immer ganz eingehalten wurde. In der Übung wurden jede Woche nur zwei vorbereitete Aufgaben besprochen, die übrige Zeit wurde mit dem gemeinsamen Lösen von Präsenzübungsaufgaben in der Gruppe und manchmal mit Ergänzungen zur Vorlesung verbracht.

Dies ist ein Vorlesungsskript, kein Lehrbuch. Das bedeutet insbesondere:

- Ergänzende Erläuterungen fehlen manchmal, veranschaulichende Zeichnungen immer, da sie nur während der Vorlesung an der Tafel gegeben wurden.
- Es wird kein Anspruch auf Originalität erhoben. Wie gesagt orientiert sich die Vorlesung stark am Buch von Hall. Vor allem die Beweise und ein großer Teil der Übungsaufgaben sind oft sinngemäß übernommen, ohne dass dies im Einzelnen kenntlich gemacht ist. Auch das Buch von Hilgert und Neeb [5] habe ich häufig herangezogen, vor allem in Abschnitt 9.
- Die Liste der zitierten Literatur stellt keine umfassende Übersicht dar, sondern enthält nur die Referenzen, auf die im Text direkt Bezug genommen wird.

Konstanz, 31. Juli 2012
Daniel Plaumann

Inhalt

1. MATRIX-LIE-GRUPPEN

Die moderne Algebra ist vor allem eine Strukturtheorie. D.h. sie geht von der Definition einer Struktur aus (Gruppe, Ring, Körper, Vektorraum etc.) und studiert systematisch die Objekte, die unter diese Definition fallen. Alle diese Strukturen haben ihren Ursprung in Beispielen, die schon lange vor der Entwicklung der Strukturtheorie untersucht wurden: Für Vektorräume sind das Lösungsräume linearer Gleichungssyteme in $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ oder in Funktionenräumen. Die (kommutative) Ringtheorie ist vor allem durch Polynomringe und Ringe ganzer Zahlen und die Teilbarkeit in ihnen motiviert, die Körpertheorie durch das Studium der Lösungen von algebraischen Gleichungen.

Die Gruppen sind in erster Linie als *Symmetrie- und Transformationsgruppen* entstanden: Die endlichen Permutationsgruppen S_n und A_n, die Galoisgruppen (Symmetriegruppen von Polynomgleichungen), die Symmetriegruppen der platonischen Körper usw. Die Lie-Gruppen sind im wesentlichen Abstraktionen der sogenannten *klassischen Gruppen*, die allesamt Gruppen von reellen oder komplexen Matrizen sind. Die Lie-Theorie ist eine Verbindung von Analysis, Differentialgeometrie und Algebra, und der moderne, systematische Zugang ist daher technisch sehr viel aufwendiger und setzt mehr voraus als bei einer rein algebraischen Theorie. Wir beginnen deshalb mit den Beispielen.

1.1. GRUNDLAGEN UND ERSTE BEISPIELE

Wir werden sowohl reelle als auch komplexe Matrixgruppen betrachten. Wenn wir Aussagen für beide Fälle gleichzeitig formulieren wollen, schreiben wir häufig $\mathbb{K}$ für einen Körper, der entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sein darf. Wir schreiben $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ für den n^2-dimensionalen Vektorraum der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Die Teilmenge

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \left\{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ ist invertierbar}\right\}$$

von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ ist eine Gruppe (bezüglich der Matrizenmultiplikation) und heißt die *allgemeine lineare Gruppe*. Das neutrale Element von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ist die Einheitsmatrix der Größe n, die wir mit I_n oder einfach I bezeichnen.

Definition 1.1. Eine (topologisch) abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ wird *Matrix-Lie-Gruppe* genannt.

Es sei $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eine Matrix-Lie-Gruppe. Dass G in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eine abgeschlossene Teilmenge ist, bedeutet genau folgendes: Ist $A_i \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, $i \in \mathbb{N}$, eine konvergente Folge von Matrizen mit $A_i \in G$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und ist $A = \lim_{i\to\infty}(A_i)$, dann gilt entweder $A \in G$ oder A ist nicht invertierbar. Der zweite Fall ist erlaubt, da wir nicht verlangen, dass G eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ ist, nur von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Tatsächlich ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ selbst nicht abgeschlossen (sondern offen) in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.

Beispiel 1.2. Die Gruppe

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\right\}$$

ist eine Matrix-Lie-Gruppe, genannt die *spezielle lineare Gruppe*.

Übung 1.1. Sei $H \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eine Matrix-Lie-Gruppe und $\varphi\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to H$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\ker(\varphi)$ eine Matrix-Lie-Gruppe.

Die Determinante einer Matrix ist ein Polynom in den Einträgen: Die Entwicklung

$$\det(X) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

der Determinante einer Matrix $X = (x_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ kann man als Polynom in n^2 Variablen x_{ij} lesen. Das Beispiel $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ motiviert damit die folgende allgemeine Definition:

Definition 1.3. Eine Teilmenge $Z \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ heißt *algebraisch*, wenn Polynome $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{K}[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ existieren derart, dass

$$X = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \mid h_1(A) = \cdots = h_r(A) = 0\}.$$

Dabei bedeutet $h_i(A)$, dass man den Eintrag a_{ij} von A an der Stelle (i,j) für x_{ij} einsetzt. Eine Untergruppe G von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ heißt eine *lineare algebraische Gruppe*, wenn es eine algebraische Teilmenge X von $\mathrm{Mat}_n(K)$ gibt mit $G = X \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Jede lineare algebraische Gruppe ist eine Matrix-Lie-Gruppe.

Beispiele 1.4.

(1) Die *multiplikative Gruppe* $\mathbb{K}^* = (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist dasselbe wie $\mathrm{GL}_1(\mathbb{K})$ und damit eine lineare algebraische Gruppe.

(2) Die *additive Gruppe* $(\mathbb{K}, +)$ ist isomorph zur linearen algebraischen Gruppe

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{K} \right\}.$$

(3) Durch die Abbildung $t \mapsto e^t$ ist ein Isomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ auf die Matrix-Lie-Gruppe $\{a \in \mathbb{R}^* \mid a > 0\}$ gegeben. (Diese ist nicht algebraisch.)

(4) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine irrationale Zahl. Betrachte

$$G = \left\{ X(t) = \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{\alpha it} \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Offenbar ist G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ (isomorph zur additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$). Sie ist jedoch nicht abgeschlossen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Dies sieht man wie folgt: Es gilt $-I \notin G$. Denn da α irrational ist, können e^{it} und $e^{\alpha it}$ nicht für dasselbe t beide gleich -1 sein, denn dazu müssten t und $t\alpha$ beide ungerade Vielfache von π sein. Andererseits existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ ungerade Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $|m - n\alpha| < \varepsilon$. (Beweis: Betrachte $\Gamma = \{m + n\alpha \mid m, n \in 2\mathbb{Z}\}$. Behaupte, dass Γ einen Häufungspunkt besitzt. Angenommen, das ist nicht der Fall, dann existiert $y = \min\{x \in \Gamma \mid x > 0\}$. Für jedes $x \in \Gamma$ gibt es dann $k \in \mathbb{N}$ mit $ky \leqslant x < (k+1)y$. Es folgt $0 \leqslant x - ky < y$ und $x - ky \in \Gamma$, also $x = ky$. Es gilt also $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot y$. Das ist aber unmöglich, da Γ sowohl rationale als auch irrationale Zahlen enthält (z.B. 0 und 2α). Also besitzt Γ einen Häufungspunkt. Damit ist jeder Punkt Häufungspunkt, d.h. Γ ist dicht in $\mathbb{R}$. Denn wäre $\beta \in \mathbb{R}$ kein Häufungspunkt, dann gäbe es wieder $y = \min\{x \in \Gamma \mid \beta < x\}$. Da Γ einen Häufungspunkt besitzt, gibt es $x_1 < x_2 \in \Gamma$ mit $x_2 - x_1 < y - \beta$. Dann gilt $\beta < y - (x_2 - x_1) < y$, ein Widerspruch. Insbesondere ist also $1 + a$ ein Häufungspunkt von Γ. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren damit gerade Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $|m - na - (1 + a)| < \varepsilon$, also $|(m-1) - (n+1)a| < \varepsilon$, wie gewünscht.) Also gibt es eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ungerader Zahlen derart, dass $(X(n_k\pi))_{k\in\mathbb{N}} \subset G$ gegen $-I$ konvergiert, so dass G nicht abgeschlossen ist.

Übung 1.2. Zeige, dass die *Vektorgruppe* $(\mathbb{K}^n, +)$ zur einer Matrix-Lie-Gruppe isomorph ist.

Beispiel 1.5. Die linearen algebraischen Gruppen

$$\begin{aligned} \mathrm{O_n}(\mathbb{K}) &= \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \mid AA^T = I_n\} \quad \text{bzw.} \\ \mathrm{SO}_n(\mathbb{K}) &= \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \mid AA^T = I_n \text{ und } \det(A) = 1\} \end{aligned}$$

heißen die *orthogonale Gruppe* bzw. die *spezielle orthogonale Gruppe*.

Übung 1.3. Zeige, dass $\mathrm{O_n}(\mathbb{K})$ und $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$ tatsächlich lineare algebraische Gruppen und damit Matrix-Lie-Gruppen sind.

Übung 1.4. Zeige, dass jede endliche Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine lineare algebraische Gruppe ist. *Zusatz:* Gilt das Gleiche auch in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Übung 1.5. Bestimme das Zentrum der Gruppen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

Übung 1.6. Es sei $n \geqslant 0$.

(a) Zeige: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ besitzt eine Untergruppe, die zur symmetrischen Gruppe S_n isomorph ist.
(b) Es sei G eine endliche Gruppe. Zeige, dass es $N \geqslant 0$ gibt derart, dass $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ eine zu G isomorphe Untergruppe enthält.

1.2. TOPOLOGIE UND ZUSAMMENHANG

Definition 1.6. Es sei X ein topologischer Raum.

(1) Ein *stetiger Weg* in X ist eine stetige Abbildung $\varphi\colon [0,1] \to X$. Die Punkte $\varphi(0)$ und $\varphi(1)$ in X heißen die *Endpunkte* von φ. Man sagt, φ *verbindet* x mit y.
(2) Der Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in X$ ein stetiger Weg in X existiert, der x mit y verbindet.

Korrekterweise wird diese Eigenschaft in der Regel *wegzusammenhängend* genannt. Die eigentliche Definition von zusammenhängend steckt in der folgenden Übungsaufgabe:

Übung 1.7.

(1) Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeige: Sind $U, V \subsetneq X$ offen mit $X = U \cup V$, so gilt $U \cap V \neq \varnothing$.
(2) Zeige: Die Teilmenge $\{(x, \sin(1/x)) \mid x \in (0,1]\} \cup \{(0,0)\}$ von $\mathbb{R}^2$ („*die Sinuskurve des Topologen*") hat die Eigenschaft aus (1), ist aber nicht wegzusammenhängend.

Der Unterschied zwischen Zusammenhang und Wegzusammenhang ist für uns jedoch unerheblich[1], so dass wir die beiden Begriffe nicht unterscheiden.

Zusammenhang spielt für die Lie-Theorie eine sehr wichtige Rolle. Wir haben in Aufgabe 1.6 gesehen, dass *jede* endliche Gruppe auch als Matrix-Lie-Gruppe auftritt. Eine endliche Gruppe ist aber nur dann zusammenhängend, wenn sie ein-elementig ist. Man kann sagen, dass die Lie-Theorie dagegen im wesentlichen nur von den zusammenhängenden Gruppen handelt, die Theorie der endlichen Gruppen also nicht beinhaltet.

Übung 1.8. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen X und Y. Zeige: Ist X zusammenhängend, so auch $f(X)$.

Lemma und Definition 1.7. Es sei X ein topologischer Raum.

[1]Jede zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit (s. §2) ist wegzusammenhängend.

(1) Seien φ, ψ stetige Wege in X mit $\varphi(1) = \psi(0)$. Dann ist

$$\psi * \varphi \colon t \mapsto \begin{cases} \varphi(2t) & \text{falls } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \psi(2t-1) & \text{falls } \frac{1}{2} < t \leqslant 1 \end{cases}$$

ein stetiger Weg von $\varphi(0)$ nach $\psi(1)$, genannt die *Komposition* von φ und ψ.

(2) Die Relation

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Es existiert ein stetiger Weg in } X \text{, der } x \text{ mit } y \text{ verbindet}$$

ist eine Äquivalenzrelation auf X. Die Äquivalenzklassen heißen die *Zusammenhangskomponenten* von X.

Beweis. Übung. □

Da es sich um Äquivalenzklassen handelt, ist X die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten. Genau dann ist X zusammenhängend, wenn ganz X die einzige Zusammenhangskomponente ist.

Übung 1.9. Die Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raums sind abgeschlossen.

Definition 1.8. Sei K ein Körper. Wir schreiben E_{ij} für die $n \times n$-Matrix mit einer 1 an der Stelle (i, j) und Nullen überall sonst. Weiter setzen wir $F_{ij}(\alpha) = I + \alpha E_{ij}$ und $D_i(\alpha) = I + (\alpha - 1)E_{ii}$ für $\alpha \in K$. Damit ist also

$$F_{ij}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & \alpha & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad D_i(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Proposition 1.9. *Sei K ein Körper.*

(1) Die Gruppe $\mathrm{SL}_n(K)$ wird von den $F_{ij}(\alpha)$, $\alpha \in K$, $i \neq j$, erzeugt.

(2) Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ wird von den $F_{ij}(\alpha)$, $\alpha \in K$, $i \neq j$, und $D_i(\alpha)$, $\alpha \in K^\times$, erzeugt.

Beweis. Für $\mathrm{GL}_n(K)$ ist das im Wesentlichen gerade die Gauß-Elimination: Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Multiplikation mit $F_{ij}(\alpha)$ von links addiert das α-Fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile, Multiplikation mit $D_i(\alpha)$ von links multipliziert die i-te Zeile mit α. Multiplikation von rechts entspricht den gleichen Operationen auf den Spalten. Im Zusammenhang mit der Gauß-Elimination beweist man: Es gibt $U, V \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $UAV = I$, wobei U und V Produkte von Matrizen des Typs $F_{ij}(\alpha)$, $D_i(\alpha)$ sind. Es gilt also $A = U^{-1}V^{-1}$, und wegen $F_{ij}(\alpha)^{-1} = F_{ij}(-\alpha)$ und $D_i(\alpha)^{-1} = D_i(\alpha^{-1})$, folgt daraus die Behauptung. Für $\mathrm{SL}_n(K)$ muss man noch überlegen, dass die $D_i(\alpha)$ nicht gebraucht werden (Übung!). □

Lemma 1.10. *Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe, und sei G_0 die Zusammenhangskomponente von G, die I enthält. Dann ist G_0 eine abgeschlossene Untergruppe von G.*

Beweis. Es seien $A, B \in G_0$ und seien $\varphi, \psi \colon [0,1] \to G_0$ stetige Wege mit $\varphi(0) = \psi(0) = I$, $\varphi(1) = A$ und $\psi(1) = B$. Dann ist $\varphi\psi \colon [0,1] \to G$, $t \mapsto \varphi(t)\psi(t)$ ein stetiger Weg in G mit $(\varphi\psi)(0) = I$ und $(\varphi\psi)(1) = AB$. Ferner ist $\widetilde{\varphi} \colon [0,1] \to G$, $t \mapsto \varphi(t)^{-1}$ ein stetiger Weg mit $\widetilde{\varphi}(0) = I$ und $\widetilde{\varphi}(1) = A^{-1}$. Also folgen $AB \in G_0$ und $A^{-1} \in G_0$, so dass G_0 eine Untergruppe ist. Nach Aufgabe 1.9 ist G_0 außerdem abgeschlossen. □

Satz 1.11. *Die Matrix-Lie-Gruppen* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *und* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *sind zusammenhängend. Die Gruppe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *hat die beiden Zusammenhangskomponenten*

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\right\} \quad \textit{und} \quad \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) < 0\right\}.$$

Beweis. Betrachte die Erzeugendensysteme in Prop. 1.9: Für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ ist $t \mapsto F_{ij}(t\alpha)$ ein stetiger Weg, der I mit $F_{ij}(\alpha)$ verbindet. Für $\alpha \in \mathbb{C}^*$ gibt es ferner einen stetigen Weg φ in $\mathbb{C}^*$, der 1 mit α verbindet. Also verbindet $t \mapsto D_i(\varphi(t))$ dann I mit $D_i(\alpha)$. Für $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ folgt damit $G = G_0$ nach Lemma 1.10, so dass G zusammenhängend ist.

Es bleibt der Fall $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Da $\mathbb{R}_+ = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha > 0\}$ zusammenhängend ist, sehen wir wie oben, dass $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \subset G_0$ gilt. Andererseits kann $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $\det(A) < 0$ nicht in G_0 liegen, da die Determinante entlang eines stetigen Weges von I nach A nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle haben müsste. Durch $A \mapsto D_1(-1)A$ ist ein Homöomorphismus $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ gegeben, so dass auch $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ zusammenhängend ist. □

Definition 1.12. Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe. Eine Untergruppe H von G heißt *diskret*, wenn es zu jedem $A \in H$ eine offene Umgebung U von A in G gibt derart, dass $U \cap H = \{A\}$.

Übung H1.1.

(a) Sei $n \geqslant 2$ und sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Zeige: Es gibt einen stetigen Weg $\varphi\colon [0,1] \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ derart, dass $\varphi(0) = I$ und $\varphi(1) \cdot v = e_1$ gilt (wobei $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$).

(b) Zeige, dass $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zusammenhängend ist. (*Vorschlag:* Zeige, dass jedes $A \in \mathrm{SO}(n)$ durch einen stetigen Weg mit einer Blockmatrix der Form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix}$$

mit $A' \in \mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ verbindbar ist.)

Übung H1.2. Es sei G eine zusammenhängende Matrix-Lie-Gruppe. Zeige, dass jeder diskrete Normalteiler von G im Zentrum von G enthalten ist.

2. LIE-GRUPPEN

2.1. MANNIGFALTIGKEITEN

Definition 2.1. Eine *topologische Mannigfaltigkeit* der Dimension n ist ein topologischer Raum M zusammen mit einer Menge $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen von M und Abbildungen $\sigma_U \colon U \to W_U$ für jedes $U \in \mathcal{U}$, wobei $W_U \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen sind, mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathcal{U}$ ist eine offene Überdeckung von M, d.h. es gilt $M = \bigcup \mathcal{U}$.
(2) Die Abbildungen σ_U sind Homöomorphismen, genannt *Karten*.
(3) Der Raum M ist ein *Hausdorffraum* (d.h. zu je zwei Punkten existieren disjunkte offene Umgebungen) und erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*.

Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ für ein $m \geqslant 0$ (mit der induzierten Topologie), so ist Eigenschaft (3) automatisch erfüllt.

Definition 2.2. Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit zugehöriger Überdeckung $\mathcal{U}$. Für $U, V \in \mathcal{U}$ sei $W_{UV} = \sigma_U(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$. Die Abbildungen $\tau_{UV} = \sigma_V \circ \sigma_U^{-1}|_{W_{UV}}$ sind Homöomorphismen $W_{UV} \to W_{VU}$ und heißen *Kartenwechsel*.

Bemerkung 2.3. Die Topologie auf einer topologischen Mannigfaltigkeit ist durch die Karten eindeutig festgelegt: Eine alternative Definition, die häufig bequemer zu verwenden ist, geht deshalb so: Eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n ist eine Menge M (zunächst ohne Topologie) zusammen mit einer Überdeckung $M = \bigcup \mathcal{U}$ durch eine Menge $\mathcal{U}$ von Teilmengen von M und Abbildungen $\sigma_U \colon U \to W_U$, die Bijektionen mit offenen Teilmengen $W_U \subset \mathbb{R}^n$ sind, derart, dass die Kartenwechsel τ_{UV} für alle $U, V \in \mathcal{U}$ Homöomorphismen sind. (Dafür wird jetzt nur die Topologie auf $\mathbb{R}^n$ verwendet.) Nun versieht man M mit der gröbsten Topologie, die alle Karten stetig macht, die sogenannte Initialtopologie, und fordert noch, dass dann Eigenschaft (3) erfüllt ist. Eine Teilmenge V von M ist nun genau dann offen, wenn $\sigma_U(V \cap U)$ für alle $U \in \mathcal{U}$ offen in W_U ist.

Definition 2.4. Eine topologische Mannigfaltigkeit heißt *glatte Mannigfaltigkeit*, wenn alle Kartenwechsel glatt (unendlich-oft differenzierbar) sind.

Beispiele 2.5.

(1) Die n-Sphäre $S^n = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|u\| = 1\}$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit. Für $k = 0, \dots, n$ und $i = 0, 1$, setze $U_k^i = \{u \in S^n \mid (-1)^i x_k > 0\}$. Die Karten sind die Projektionen

$$\sigma_k^i \colon \begin{cases} U_k^i & \to & W_k^i = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| < 1\} \\ u & \mapsto & (u_0, \dots, \widehat{u_k}, \dots, u_n) \end{cases}$$

Wie üblich bedeutet dabei die Notation $\widehat{u_k}$, dass die k-te Koordinate weggelassen wurde. Nun ist $(\sigma_k^i)^{-1} \colon W_k^i \to U_k^i$ gegeben durch $(v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, v_n) \mapsto (v_0, \dots, v_n)$ mit $v_k = (-1)^i \sqrt{1 - \sum_{r \neq k} v_r^2}$. Damit sind die Kartenwechsel zwischen den Mengen $W_{kl}^{ij} = \sigma_k^i(U_k^i \cap U_l^j) = \{(v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| < 1 \text{ und } (-1)^j v_l > 0\}$ gegeben durch

$$\tau_{kl}^{ij} \colon \begin{cases} W_{kl}^{ij} & \to & W_{lk}^{ji} \\ (v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, v_n) & \mapsto & (v_0, \dots, v_k = (-1)^i \sqrt{1 - \sum_{r \neq k} v_r^2}, \dots, \widehat{v_l}, \dots, v_n) \end{cases}$$

alle glatt, da der Ausdruck unter der Wurzel für $v \in W_k^i$ nicht Null wird.

(2) Der *n-dimensionale reelle projektive Raum* ist die Menge aller eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^{n+1}$, geschrieben $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (geometrisch also die Menge aller Ursprungsgeraden). Ein solcher Unterraum wird durch einen Vektor $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $a \neq 0$ erzeugt. Natürlich erzeugen a und λa für $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ denselben Unterraum, entsprechen also demselben *Punkt* $\mathbb{R} \cdot a = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Für $i = 0, \dots, n$ definieren wir

$$U_i = \{\mathbb{R} \cdot a \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid a_i \neq 0\}$$

und eine Abbildung

$$\sigma_i\colon \begin{cases} U_i & \to \quad \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R} \cdot a & \mapsto \quad \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \widehat{\frac{a_i}{a_i}}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right) \end{cases}$$

Ist $b = (b_0, \dots, \widehat{b_i}, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, so ist $\sigma_i^{-1}(b) = \mathbb{R} \cdot (b_0, \dots, 1, \dots, b_n)$. Für die Kartenwechsel gilt $W_{ij} = \sigma_i(U_i \cap U_j) = \{(b_0, \dots, \widehat{b_i}, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n \mid b_j \neq 0\}$ und

$$\tau_{ij} = \sigma_j \circ \sigma_i^{-1}\colon \begin{cases} W_{ij} & \to \quad W_{ji} \\ (b_0, \dots, \widehat{b_i}, \dots, b_n) & \mapsto \quad \left(\frac{b_0}{b_j}, \dots, \frac{1}{b_j}, \dots, \frac{b_n}{b_j}\right), \end{cases}$$

wobei $1/b_j$ rechts an der mit i indizierten Stelle steht. Diese Abbildung ist glatt.

Der wesentliche Unterschied zum vorigen Beispiel, ist dass $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ nicht bereits als Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ für ein $m \geqslant 0$ gegeben ist. Beachte, dass noch nichts über die Topologie auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ gesagt wurde. Diese wird erst durch die Karten gegeben (siehe Bem. 2.3). Man muss noch überprüfen, dass $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ein Hausdorffraum ist. Dann ist gezeigt, dass $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

Übung 2.1. Zeige, dass $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ homöomorph zu S^1 ist.

Beispiel 2.6. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und sei

$$H = \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(u) = 0\}.$$

Die Menge H heißt eine glatte *Hyperfläche*, falls der Gradient $(\nabla f)(u)$ für kein $u \in H$ der Nullvektor ist. Jede glatte Hyperfläche ist eine glatte Mannigfaltigkeit (der Dimension $n-1$, falls sie nicht leer ist). Dies folgt aus dem Satz über implizite Funktionen. Denn dieser besagt: Ist $(\nabla f)(v) \neq 0$ für $v \in H$, etwa $\left(\partial f / \partial x_1\right)(v) \neq 0$, so gibt es eine offene Umgebung W von $(v_2, \dots, v_n)$ in $\mathbb{R}^{n-1}$, eine offene Umgebung V von v_1 in $\mathbb{R}$ und eine glatte Abbildung $\varphi\colon W \to V$ mit

$$\left\{u \in V \times W \mid f(u) = 0\right\} = \left\{(\varphi(w), w) \in V \times W \mid w \in W\right\}.$$

Setze $U = H \cap (V \times W)$. Dann ist $\sigma\colon U \to W$, $u \mapsto (u_2, \dots, u_n)$ eine Karte um v mit Umkehrfunktion $\sigma\colon w \mapsto (\varphi(w), w)$. Man erhält auf diese Weise eine glatte Struktur auf H.

Übung 2.2. Zeige, dass S^n eine glatte Hyperfläche ist.

Bemerkung 2.7. Jede glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ in $\mathbb{R}^n$ ist eine glatte Hyperfläche.

Übung 2.3. Es sei $f \in \mathbb{R}[x, y]$ ein Polynom und sei $H = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid f(u) = 0\}$.

(a) Es sei $f = y^2 - x^2(x+1)$. Zeige, dass H keine topologische Mannigfaltigkeit ist.
(b) Es sei $f = y^2 - x^3$. Zeige: H ist eine topologische, aber keine glatte Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 2.8. In der Definition einer glatten Mannigfaltigkeit wird nur verlangt, dass die Kartenwechsel glatt sind. Tatsächlich wäre es Unsinn, die Differenzierbarkeit der Karten selbst zu fordern, denn für eine Abbildung in einen abstrakten topologischen Raum hat man gar keinen Begriff von Differenzierbarkeit. Erst durch die Karten wird die sogenannte *glatte Struktur* auf einer topologischen Mannigfaltigkeit definiert. Dabei kann es auf derselben topologischen Mannigfaltigkeit mehrere verschiedene glatte Strukturen geben.[1] In diesem Zusammenhang gibt es einige sehr berühmte Sätze: Auf der topologischen 7-Sphäre S^7 gibt es 28 verschiedene glatte Strukturen, die sogenannten exotischen Sphären (Milnor und Kervaire, 1959-63). Es gibt sogar unendlich viele glatte Strukturen auf $\mathbb{R}^4$ (aber nicht auf $\mathbb{R}^n$ für $n \neq 4$). (Donaldson, Freedman und Kirby, 1983)

Übung 2.4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeige, dass auch $M \times M$ „in natürlicher Weise“ eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

Definition 2.9. Eine *komplexe Mannigfaltigkeit* der (komplexen) Dimension n ist eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, wobei man überall $\mathbb{R}^{2n}$ mit $\mathbb{C}^n$ identifiziert und fordert, dass alle Kartenwechsel holomorph seien.

Definition 2.10. Seien M bzw. N zwei glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n mit zugehörigen Überdeckungen $\mathcal{U}$ bzw. $\mathcal{V}$. Eine stetige Abbildung $f\colon M \to N$ heißt *glatt im Punkt $p \in M$*, wenn folgendes gilt: Es gibt $U \in \mathcal{U}$ mit $p \in U$ und $V \in \mathcal{V}$ mit $f(p) \in V$ derart, dass die Abbildung

$$(\sigma_V \circ f \circ \sigma_U^{-1})\colon \sigma_U(U \cap f^{-1}(V)) \to \sigma_V(V)$$

zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ glatt im Punkt $\sigma_U(p)$ ist. Die Abbildung f heißt *glatt*, wenn sie in allen Punkten von M glatt ist.

Völlig analog definiert man eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten, indem man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ und glatt durch holomorph ersetzt.

Eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$ heißt ein *Diffeomorphismus*, wenn sie bijektiv ist und die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon N \to M$ ebenfalls glatt ist. Falls solches f existiert, sagt man auch, dass M und N *diffeomorph* sind. Eine holomorphe Bijektion mit holomorpher Umkehrabbildung heißt *biholomorph*.

Bemerkung 2.11. So wie verschiedene glatte Strukturen auf einer topologischen Mannigfaltigkeit möglich sind, kann es auch verschiedene *komplexe Strukturen* auf einer glatten Mannigfaltigkeit geben. Anders ausgedrückt: Zwei komplexe Mannigfaltigkeiten können diffeomorph sein, ohne biholomorph zu sein. Das Studium der verschiedenen komplexen Strukturen auf einer topologischen oder glatten Mannigfaltigkeit ist eines der zentralen Themen der komplexen Geometrie.

[1] „Verschieden“ soll heißen, dass die Systeme von Karten keine gemeinsame Verfeinerung besitzen.

2.2. LIE-GRUPPEN

Definition 2.12. Eine *(reelle) Lie-Gruppe* der Dimension n ist eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit G mit einer glatten Gruppenstruktur, d.h. derart, dass die Abbildungen

$$\begin{cases} G \times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & gh \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} G & \to & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{cases}$$

glatt sind. Eine *komplexe Lie-Gruppe* ist eine komplexe Mannigfaltigkeit mit holomorpher Gruppenstruktur.

Natürlich ist jede komplexe Lie-Gruppe der komplexen Dimension n eine reelle Lie-Gruppe der Dimension $2n$. Deshalb lassen wir das Wort „reell" häufig weg.

Aus dem, was wir bis jetzt gesehen haben, ist keineswegs klar, dass jede Matrix-Lie-Gruppe eine Lie-Gruppe ist. Es ist zumindest nicht schwer zu sehen, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ selbst eine (reelle bzw. komplexe) Lie-Gruppe ist: Denn $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ist eine offene Teilmenge von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$ und damit eine glatte bzw. komplexe Mannigfaltigkeit (mit nur einer Karte). Die Multiplikation von Matrizen ist außerdem durch (quadratische) Polynome in den Einträgen gegeben und damit sicher glatt bzw. holomorph. Um zu sehen, dass das auch für die Inversenbildung der Fall ist, kann man die kramersche Regel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{\mathrm{adj}}.$$

benutzen. Dabei ist A^{adj} die adjungierte Matrix (auch Cramer-Matrix oder Cofaktor-Matrix genannt), deren Einträge die signierten $(n-1) \times (n-1)$-Minoren von A sind. Diese sind Polynome in den Einträgen von A, ebenso die Determinante, was zeigt, dass die Abbildung $A \mapsto A^{-1}$ glatt (bzw. holomorph) ist.
Die folgende allgemeine Aussage werden wir später beweisen:

Satz 2.13. *Jede abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe ist eine Lie-Gruppe.* □

Korollar 2.14. *Jede Matrix-Lie-Gruppe ist eine Lie-Gruppe.* □

Bemerkung 2.15. Eine abgeschlossene Teilmenge, die eine Untergruppenstruktur trägt, ist also automatisch glatt. Es ist eine natürliche Frage, ob man denn dann eigentlich die Glattheit in der Definition einer Lie-Gruppe überhaupt braucht. Diese Frage war das *Fünfte Hilbertsche Problem* aus dem Jahr 1900. Es gibt verschiedene (gelöste und ungelöste) Varianten des Problems, aber meistens wird der Satz von Gleason, Montgomery und Zippin (1950) als Lösung angesehen: Tatsächlich ist jede topologische Mannigfaltigkeit mit stetiger Gruppenstruktur eine Lie-Gruppe (sogar analytisch, nicht nur glatt).

Definition 2.16. Es seien G und H Lie-Gruppen. Ein stetiger Homomorphismus $\varphi\colon G \to H$ von Gruppen heißt *Homomorphismus von (reellen) Lie-Gruppen* oder *Lie-Gruppen-Homomorphismus*. Ein holomorpher Homomorphismus zwischen komplexen Lie-Gruppen heißt *Homomorphismus von komplexen Lie-Gruppen*.

Bemerkung 2.17. Wir beweisen später, dass jeder Homomorphismus von Lie-Gruppen glatt ist. Deshalb haben wir die Glattheit im reellen Fall nicht in die Definition gesteckt.

Definition 2.18. Es sei G eine Lie-Gruppe. Die Zusammenhangskomponente von G, die das neutrale Element enthält, heißt die *Einskomponente* von G und wird mit G^0 bezeichnet.

Satz 2.19. *Die Einskomponente einer Lie-Gruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe.*

Beweis. Der Beweis ist wörtlich der gleiche wie der von Lemma 1.10. □

Ein Vorteil der abstrakten Definition von Lie-Gruppe besteht darin, dass sie wesentlich flexibler ist. Zum Beispiel gilt folgendes: Ist G eine Lie-Gruppe und N ein abgeschlossener Normalteiler, dann ist G/N wieder eine Lie-Gruppe. Genauer lautet die Aussage so:

Satz 2.20. *Es sei G eine Lie-Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Dann gibt es genau eine Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit auf der Menge G/H der Linksnebenklassen derart, dass die Operation von G auf G/H durch Linksmultiplikation glatt ist.*

Beweis. Siehe Varadarajan [**6**, Thm. 2.9.4]. □

Die analoge Aussage für Matrix-Lie-Gruppen ist dagegen nicht wahr: Ist N eine abgeschlossene Untergruppe einer Matrix-Lie-Gruppe, dann ist G/N eine Lie-Gruppe, aber nicht unbedingt eine Matrix-Lie-Gruppe.

2.3. NEUE GRUPPE: TORI

Es sei

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}).$$

Betrachte die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to S^1$ definiert durch $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$. Offenbar ist φ ein surjektiver Lie-Gruppen-Homomorphismus mit $\ker(\varphi) = \mathbb{Z}$. Es gilt also $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Bemerkung 2.21. Beachte, dass S^1 zwar eine Matrix-Lie-Gruppe ist, die als Untergruppe von $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ definiert ist, aber trotzdem keine *komplexe* Lie-Gruppe. Denn S^1 kann keine komplexe Mannigfaltigkeit sein, da die Dimension ungerade ist.

Der *n-dimensionale Torus* ist die Lie-Gruppe

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{\text{n-mal}}.$$

Es gilt $T^n \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ als Gruppen. Die Struktur auf $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ als glatte Mannigfaltigkeit wird durch die Identifikation mit T^n definiert. Man kann dem Quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ auch eine „von $\mathbb{R}^n$ induzierte Struktur“ verpassen (Satz 2.20), die mit der auf T^n identisch ist.

Zur Übung überlegen wir uns das für $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ explizit: Wir schreiben $\overline{a}$ für die Restklasse von $a \in \mathbb{R}$ modulo $\mathbb{Z}$. Definiere $W_0 = (0,1)$ und $W_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und sei $U_j = \{\overline{a} \mid a \in W_j\}$, $j = 0,1$. Es gilt sicher $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = W_0 \cup W_1$. Außerdem sind die Abbildungen $W_j \to U_j$, $a \mapsto \overline{a}$ bijektiv, es gibt also eindeutige Abbildungen $\sigma_j\colon U_j \to W_j$ mit $\sigma_j^{-1}(a) = \overline{a}$ für $j = 0,1$. Es gilt $W_{01} = \sigma_0(U_0 \cap U_1) = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ und $W_{10} = \sigma_1(U_0 \cap U_1) = (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$. Der Kartenwechsel $\tau_{01}\colon W_{01} \to W_{10}$, definiert durch $\tau_{01} = \sigma_1 \circ \sigma_0^{-1}|_{W_{01}}$, ist schlicht und einfach $\tau_{01}(a) = a - \frac{1}{2}$ und damit glatt.

Bemerkung 2.22. Es gibt auch *komplexe Tori*. Es sei $v_1, \dots, v_{2n}$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei Γ die von $v_1, \dots, v_{2n}$ erzeugte Untergruppe der additiven Gruppe $(\mathbb{C}^n, +)$, ein *Gitter* in $\mathbb{C}^n$. Explizit ist $\Gamma = \left\{\sum_{j=1}^{2n} a_j v_j \mid a_j \in \mathbb{Z}\right\}$. Die abelsche Gruppe $T(\Gamma) = (\mathbb{C}, +)/\Gamma$ hat eine Struktur als komplexe Mannigfaltigkeit, induziert durch die auf $\mathbb{C}^n$. (Man kann sie explizit angeben, ähnlich wie oben für $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.) Damit wird $T(\Gamma)$ zu einer komplexen Lie-Gruppe. Aufgefasst als *reelle* Lie-Gruppe ist $T(\Gamma)$ isomorph zu T^{2n}. Denn es gibt einen reellen Basiswechsel auf $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, der $v_1, \dots, v_{2n}$ in die Standardbasis und damit Γ in das Standardgitter $\mathbb{Z}^{2n}$ überführt. Dieser Basiswechsel ist aber i.a. nicht komplex-linear (auch nicht holomorph). Deshalb hängt die komplexe Struktur auf $T(\Gamma)$ vom Gitter Γ ab.

Komplexe Tori sind daher sehr viel komplzierter als reelle Tori und spielen eine wichtige Rolle in der komplexen algebraischen und analytischen Geometrie. Für $n = 1$ entsprechen sie gerade den elliptischen Kurven über $\mathbb{C}$.

2.4. DIE FUNDAMENTALGRUPPE

Es sei X ein topologischer Raum. Ein stetiger Weg $\varphi\colon [0,1] \to X$ heißt *geschlossen*, wenn $\varphi(0) = \varphi(1)$ gilt. Dabei heißt $\varphi(0)$ der *Basispunkt* von φ. Ein geschlossener Weg ist also gerade eine stetige Abbildung $S^1 \to X$.

Definition 2.23. Es seien p, q in X. Zwei stetige Wege φ, ψ mit Anfangspunkt p und Endpunkt q heißen *homotopieäquivalent*, wenn es eine stetige Abbildung $\Phi\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ gibt derart, dass folgendes gilt:

(1) $\varphi(t) = \Phi(t,0)$ und $\psi(t) = \Phi(t,1)$ für alle $t \in [0,1]$.
(2) $\Phi(0,s) = p$ und $\Phi(1,s) = q$ für alle $s \in [0,1]$.

Die Vorstellung ist dabei, dass der Weg φ in X stetig in den Weg ψ deformiert wird, wobei die Endpunkte die ganze Zeit über festgelassen werden.

Übung 2.5. Zeige: Die Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Wege von p nach q in X.

Übung 2.6. Sind $p, q \in X$ und ist $\varphi\colon [0,1] \to X$ ein stetiger Weg von p nach q, so ist $\varphi^{-1}\colon t \mapsto \varphi(1-t)$ ein stetiger Weg von q nach p. Zeige: $\varphi^{-1} * \varphi$ ist homotopieäquivalent zum konstanten Weg $t \mapsto p$.

Lemma und Definition 2.24. Es sei $p \in X$ ein Punkt und sei $\pi_1(X;p)$ die Menge aller Homotopieäquivalenzklassen geschlossener Wege mit Basispunkt p. Ist φ ein geschlossener Weg in X mit Basispunkt p, so schreiben wir $[\varphi] \in \pi_1(X;p)$ für die Homotopieäquivalenzklasse von φ. Die Menge $\pi_1(X;p)$ wird durch die Verknüpfung $([\psi],[\varphi]) \mapsto [\psi * \varphi]$ zu einer Gruppe, genannt die *Fundamentalgruppe* von X bezüglich p.

Beweis. Man muss überprüfen, dass die Verknüpfung mit der Homotopieäquivalenz verträglich ist und dass die Gruppenaxiome erfüllt sind (siehe auch Aufgabe 2.6). □

Übung 2.7. Zeige: Ist $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein stetiger Weg und ist $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(1)$, so wird durch die Abbildung $[\varphi] \mapsto [\gamma * \varphi * \gamma^{-1}]$ ein Isomorphismus $\pi_1(X;p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X;q)$ induziert.

Diese Aufgabe zeigt insbesondere, dass die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden Raums X bis auf Isomorphie nicht von der Wahl des Basispunkts abhängt. Deshalb schreibt man in diesem Fall oft einfach $\pi_1(X)$, ohne den Basispunkt zu spezifizieren.

Definition 2.25. Ein topologischer Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er zusammenhängend ist und alle geschlossenen Wege in X homotopieäquivalent sind, also $\pi_1(X) = \{1\}$ gilt.

Übung 2.8. Zeige, dass $\mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist.

Beispiele 2.26. Die gelochte Ebene $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ und die Kreislinie S^1 sind zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend. Die Fundamentalgruppe ist in beiden Fällen $\pi_1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Dabei ist die einem Weg entsprechende ganze Zahl gerade seine *Umlaufzahl* (oder *Windungszahl*). Dagegen ist $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{(0,\dots,0)\}$ für $n \geqslant 3$ einfach zusammenhängend.

Übung H2.1. Zeige, dass $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ eine glatte Hyperfläche in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist.

Übung H2.2. Es sei $\varphi\colon (\mathbb{R},+) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Zeige: Es gibt $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi(x) = e^{i\alpha t}.$$

3. DIE MATRIX-EXPONENTIALABBILDUNG

Die Matrix-Exponentialabbildung ist die Verallgemeinerung der komplexen Exponentialfunktion auf Matrizen. Für $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ definieren wir die *Matrixexponentialreihe*

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} X^m.$$

Wie üblich schreiben wir statt e^X auch $\exp(X)$. Ein paar Vorbemerkungen, ehe wir uns mit Konvergenz und weiteren Eigenschaften befassen: Das unitäre Standard-Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$ auf $\mathbb{C}^n$ kann man genauso auf $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ definieren:

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} X_{jk} \overline{Y_{jk}}.$$

Die resultierende Norm $\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle}$ auf $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ heißt die *Hilbert-Schmidt-Norm* (und ist vor allem von der Operatornorm zu unterscheiden).

Übung 3.1. Zeige: Für alle $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ gelten:

(1) $\|XY\| \leqslant \|X\|\,\|Y\|$.
(2) $\langle X, Y\rangle = \mathrm{Re}\big(\mathrm{tr}(X\overline{Y}^T)\big)$.

Proposition 3.1. *Die Matrixexponentialreihe e^X konvergiert für jedes $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ absolut, und die Abbildung $X \mapsto e^X$ ist stetig.*

Beweis. Nach Aufgabe 3.1(1) gilt $\|X^m\| \leqslant \|X\|^m$ und damit

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|X^m\|}{m!} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|X\|^m}{m!} = e^{\|X\|} < \infty.$$

Also konvergiert e^X absolut. Die Konvergenz ist außerdem gleichmäßig auf allen Kompakta $\{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \|X\| \leqslant r\}$, $r \geqslant 0$, was die Stetigkeit zeigt. □

Proposition 3.2. *Für $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ gelten:*

(1) $e^0 = I$.
(2) $(\overline{e^X})^T = e^{\overline{X}^T}$.
(3) *e^X ist invertierbar und es gilt* $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.
(4) *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt* $e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X} e^{\beta X}$.
(5) *Falls $XY = YX$, so gilt* $e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X$.
(6) *Für $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gilt* $e^{CXC^{-1}} = Ce^X C^{-1}$.
(7) $\|e^X\| \leqslant e^{\|X\|}$.

Definition 3.3. Die Abbildung $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $X \mapsto e^X$, heißt die *Matrix-Exponentialabbildung.*

Beweis von 3.2. (1) ist klar und (2) rechnet man direkt nach. (3) und (4) sind Spezialfälle von (5). Um also (5) zu beweisen, multiplizieren wir die beiden Reihen einfach direkt aus:

$$e^X e^Y = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{X^k}{k!} \frac{Y^{m-k}}{(m-k)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} X^k Y^{m-k}.$$

Da X und Y vertauschbar sind, dürfen wir die übliche binomische Formel

$$(X+Y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} X^k Y^{m-k}$$

verwenden und erhalten $e^X e^Y = e^{X+Y}$.

(6) folgt einfach aus $(CXC^{-1})^m = CX^mC^{-1}$, und (7) haben wir schon gesehen. □

Übung 3.2. Finde ein Beispiel für zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ mit $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Definition 3.4. Die Matrix-Logarithmusreihe ist für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ definiert durch

$$\log(A) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(A-I)^m}{m}.$$

Proposition 3.5.

(1) *Für* $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ *mit* $\|A - I\| < 1$ *konvergiert* $\log(A)$ *absolut und es gilt*

$$e^{\log(A)} = A.$$

(2) *Die Funktion* $A \mapsto \log(A)$ *ist stetig auf* $\{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \|A - I\| < 1\}$.

(3) *Für alle* $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ *mit* $\|A\| < \log(2)$ *gelten* $\|e^A - I\| < 1$ *und*

$$\log(e^A) = A.$$

Beweisskizze. Die übliche Logarithmusreihe $\log(z) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(z-1)^m}{m}$ konvergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| < 1$ und für solche z gilt $\exp(\log(z)) = z$. Ferner gilt $\log(\exp(z)) = z$ falls $|z| < \log 2$. Wegen $\|(A-I)^m\| \leqslant \|A-I\|^m$ folgt $\|\log(A)\| \leqslant \log(\|A-I\|+1)$ und daraus Konvergenz und Stetigkeit, wie im Fall der Exponentialreihe.

Sei nun $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $\|A - I\| < 1$ und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A. Es gilt $|\lambda_j - 1| < 1$ für $j = 1, \ldots, n$. Falls A diagonalisierbar ist, etwa $A = CDC^{-1}$ mit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, so gilt $A - I = C(D-I)C^{-1}$. Man erhält direkt durch Einsetzen

$$\log(A) = C \begin{bmatrix} \log(\lambda_1) & 0 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \log(\lambda_n) \end{bmatrix} C^{-1}$$

und somit $\exp(\log(A)) = A$. Falls A nicht diagonalisierbar ist, so gibt es nach Aufgabe 3.3 eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von diagonalisierbaren Matrizen, die gegen A konvergiert, so dass $\exp(\log(A)) = A$ aus der Stetigkeit folgt.

Gilt $\|A\| < \log(2)$, so folgt $\|e^A - I\| < 1$ (Aufgabe 3.4) und man zeigt $\log(\exp(A)) = A$ durch dieselbe Reduktion auf den diagonalisierbaren Fall wie oben. □

Übung 3.3. Zeige: Die diagonalisierbaren Matrizen sind dicht in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. *Vorschlag:* Benutze, dass jede Matrix über $\mathbb{C}$ trigonalisierbar (ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix) ist.

Übung 3.4. Zeige: Aus $\|A\| < \log(2)$ folgt $\|e^A - I\| < 1$.

Lemma 3.6. *Es gibt eine Konstante* $c \in \mathbb{R}$ *derart, dass für alle* $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ *mit* $\|B\| < \frac{1}{2}$ *gilt:*

$$\|\log(I+B) - B\| \leqslant c\|B\|^2.$$

Beweis. Es gilt

$$\log(I+B) - B = \sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{B^m}{m} = B^2 \sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{B^{m-2}}{m}$$

und damit

$$\|\log(I+B) - B\| \leqslant \|B\|^2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{2^{m-2}m}.$$

Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert gegen die gewünschte Konstante. □

Satz 3.7 (Liesche Produktformel). *Für $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ gilt*

$$e^{X+Y} = \lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\right)^m.$$

Beweis. Zunächst schaut man sich das Produkt $e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}$ als Reihe ausmultipliziert an: In allen Termen außer den ersten drei kommt $1/m$ mindestens quadratisch vor. Es ist also

$$e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}} = I + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\Big(\frac{1}{m^2}\Big).$$

Damit ist $\lim_{m\to\infty}(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}) = I$, so dass $e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}$ für große m im Konvergenzbereich des Logarithmus liegt. Nach obigem Lemma gilt $\log(I+B) = B + O(\|B\|^2)$ und damit

$$\begin{aligned}\log\Big(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\Big) &= \log\left(I + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\Big(\frac{1}{m^2}\Big)\right)\\ &= \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\left\|\frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\Big(\frac{1}{m^2}\Big)\right\|^2\right) =\\ &= \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\Big(\frac{1}{m^2}\Big).\end{aligned}$$

Anwenden des Exponentials auf beiden Seiten ergibt

$$e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}} = \exp\left(\frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\Big(\frac{1}{m^2}\Big)\right)$$

und damit

$$\Big(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\Big)^m = \exp\left(X + Y + O\Big(\frac{1}{m}\Big)\right).$$

Da die Exponentialabbildung stetig ist, folgt die Behauptung. □

Definition 3.8. Es sei G eine Lie-Gruppe. Ein stetiger Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R},+) \to G$ heißt *Einparameter-Untergruppe* von G.

Proposition 3.9. *Für jedes $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ ist die Abbildung $\gamma_X\colon t \mapsto e^{tX}$ eine glatte Einparameter-Untergruppe, und es gilt*

$$\gamma_X'(t) = Xe^{tX} = e^{tX}X$$

und damit insbesondere $\gamma_X'(0) = X$.

Beweis. Das sieht man einfach durch Ableiten nach Termen: $\gamma_X(t) = \sum_{m=0}^\infty t^m \frac{X^m}{m!}$, also $\gamma_X'(t) = X\sum_{m=1}^\infty t^{m-1}\frac{X^{m-1}}{(m-1)!} = Xe^{tX} = e^{tX}X$. □

Satz 3.10. *Jede Einparameter-Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist von der Form γ_X für ein eindeutig bestimmtes $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Insbesondere sind alle Einparameter-Untergruppen glatt.*

Beweis. Dass γ_X für jedes $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ eine Einparameter-Untergruppe ist, ist klar aus den Eigenschaften der Exponentialabbildung. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus Prop. 3.9, denn es gilt $X = \gamma_X'(0)$. Es bleibt, die Existenz von X zu beweisen. Dazu einige Vorüberlegungen: Sei $\varepsilon < \log 2$ und $B_{\varepsilon/2} = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \|X\| < \varepsilon/2\}$ und $U = \exp(B_{\varepsilon/2})$. Aus der Stetigkeit von exp und log folgt, dass U offen ist.

Zeige zunächst folgendes: Zu jedem $A \in U$ gibt es eine eindeutig bestimmte Quadratwurzel in U, also genau ein $B \in U$ mit $B^2 = A$, nämlich $B = \exp(\frac{1}{2}\log(A))$. Sei dazu $C \in U$ mit $C^2 = A$ und sei $X = \log(C)$. Dann gilt $\exp(X) = C$ und $\exp(2X) = C^2 = A =$

$\exp(\log(A)$. Wegen $X \in B_{\varepsilon/2}$ gilt $2X \in B_\varepsilon$, ebenso $\log(A) \in B_\varepsilon$. Da exp auf B_ε injektiv ist, folgt $2X = \log(A)$, also $C = \exp(X) = \exp(\frac{1}{2}\log(A)) = B$, wie behauptet.

Sei nun γ eine Einparameter-Untergruppe. Da γ stetig ist mit $\gamma(0) = I \in U$, gibt es $t_0 > 0$ derart, dass $\gamma(t) \in U$ für alle t mit $|t| \leqslant t_0$ gilt. Setze $X = \frac{1}{t_0}\log(\gamma(t_0))$. Dann gilt $t_0 X \in B_{\varepsilon/2}$ und $\gamma(t_0) = \exp(t_0 X)$. Nun ist $\gamma(t_0/2) \in U$ nach Wahl von t_0 und es gilt $\gamma(t_0/2)^2 = \gamma(t_0)$. Wegen der Eindeutigkeit der Quadratwurzel in U folgt $\gamma(t_0/2) = \exp(t_0 X/2)$.

Durch induktives Anwenden dieses Arguments sieht man $\gamma(t_0/2^k) = \exp(t_0 X/2^k)$ für alle $k > 0$. Außerdem gilt $\gamma(mt_0/2^k) = \gamma(t_0/2^k)^m = \exp(t_0X/2^k)^m = \exp(mt_0X/2^k)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Das heißt also, wir haben $\gamma(t) = \exp(tX)$ für alle t der Form $m/2^k$, $m \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ gezeigt. Diese Zahlen bilden eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Aus der Stetigkeit von exp und γ folgt damit $\gamma(t) = \exp(tX)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □

3.1. NEUE GRUPPE: UNITÄRE GRUPPE

Die Matrix-Lie-Gruppe

$$\mathrm{U}_n = \left\{ A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid A\overline{A^T} = I_n \right\}$$

heißt die *unitäre Gruppe*. Die unitären Matrizen mit Determinante 1 bilden die *spezielle unitäre Gruppe*

$$\mathrm{SU}_n = \mathrm{U}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}).$$

Bemerkungen 3.11.

- Die unitären Abbildungen erhalten das komplexe Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. In gewisser Weise ist U_n damit das komplexe Analogon zu $\mathrm{O_n}(\mathbb{R})$. Sie ist aber *keine* komplexe Lie-Gruppe. (Wir haben z.B. schon gesehen, dass $S^1 = U_1$ keine komplexe Lie-Gruppe ist, da sie ungerade reelle Dimension hat.)
- Völlig analog zu $\mathrm{O_n}(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ beweist man, dass U_n und SU_n kompakt und zusammenhängend sind (Aufgabe H1.1). (Hier besteht im Beweis kein Unterschied zwischen U_n und SU_n, da U_1 und SU_1 beide zusammenhängend sind.)

Übung 3.5. Bestimme die Dimension von U_n und SU_n.

Übung H3.1. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ heißt *nilpotent*, wenn es $k > 0$ gibt mit $A^k = 0$. Sie heißt *unipotent*, wenn $A - I$ nilpotent ist. Für unipotentes A existiert $\log(A)$, da die Reihe abbricht. Zeige:

(a) Ist A unipotent, so ist $\log(A)$ nilpotent und es gilt $\exp(\log(A)) = A$. (*Hinweis:* Betrachte $A(t) = I + t(A - I)$ für $t \in \mathbb{R}$.)

(b) Ist A nilpotent, so ist $\exp(A)$ unipotent und es gilt $\log(\exp(A)) = A$.

Übung H3.2. Zeige: Zu jedem $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ existiert $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $A = \exp(X)$. Für $n = 1$ darf die Aussage als bekannt vorausgesetzt werden. (*Hinweis:* Jordansche Normalform und H3.1)

4. LIE-ALGEBREN

Definition 4.1. Es sei $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix-Lie-Gruppe. Die Menge

$$\mathfrak{g} = \left\{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid e^{tX} \in G \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\right\}$$

heißt die *Lie-Algebra* von G.

Die Lie-Algebra besteht also genau aus den Matrizen, die nach Satz 3.10 die Einparameteruntergruppen γ_X von G definieren.

Übung 4.1. Gib ein Beispiel einer Matrix-Lie-Gruppe G und $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $e^X \in G$ aber $X \notin \mathfrak{g}$.

Beispiel 4.2. Die Lie-Algebra von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist per Definition $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ und wird mit $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ bezeichnet. Ebenso ist $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, die Lie-Algebra von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, einfach $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Denn ist $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $e^{tX} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist $X = \frac{d}{dt}e^{tX}\big|_{t=0}$ reell.

Insbesondere sehen wir auch: Die Lie-Algebra einer Matrix-Lie-Gruppe, die als abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gegeben ist, ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ und besteht damit aus reellen Matrizen.

Proposition 4.3. *Die Lie-Algebra einer Matrix-Lie-Gruppe stimmt mit der Lie-Algebra ihrer Einskomponente überein.*

Beweis. Das folgt sofort daraus, dass jede Einparameteruntergruppe zusammenhängend ist und damit vollständig in der Einskomponente liegt. □

Proposition 4.4. *Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Für $X \in \mathfrak{g}$ und $A \in G$ gilt $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Nach Prop. 3.2(6) gilt $\exp(t(AXA^{-1}) = A\exp(tX)A^{-1}$. □

Definition 4.5. Es seien $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Die Matrix

$$[X, Y] = XY - YX$$

heißt der *Kommutator* von X und Y.

Proposition 4.6. *Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra.*

(1) *Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist ein $\mathbb{R}$-linearer Unterraum von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.*
(2) *Für $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt $[X, Y] \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Es ist klar, dass $sX \in \mathfrak{g}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$, $s \in \mathbb{R}$ gilt (nicht jedoch für $s \in \mathbb{C}$). Um $X + Y \in \mathfrak{g}$ für $X, Y \in \mathfrak{g}$ zu beweisen, benutzen wir die Liesche Produktformel 3.7. Diese besagt $\exp(t(X + Y)) = \lim_{m\to\infty}(\exp(tX/m)\exp(tY/m))^m$. Da G eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist und $\exp(tX/m) \in G$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ gilt, folgt auch $\exp(t(X + Y)) \in G$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also $X + Y \in \mathfrak{g}$, wie behauptet. Damit ist (1) bewiesen. Wir zeigen (2): Wegen $\frac{d}{dt}e^{tX}\big|_{t=0} = X$ gilt

$$\frac{d}{dt}(e^{tX}Ye^{-tX})\bigg|_{t=0} = XY - YX$$

nach der Produktregel. Es folgt also

$$[X,Y] = XY - YX = \lim_{h\to 0} \frac{e^{hX}\cdot Y\cdot e^{-hX} - Y}{h}$$

und somit $[X,Y] \in \mathfrak{g}$, da $e^{hX}\cdot Y\cdot e^{-hX} \in G$ für alle h (nach Prop. 4.4) und $\mathfrak{g}$ nach (1) ein $\mathbb{R}$-linearer Unterraum von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ ist. □

Definition 4.7. Es sei K ein Körper. Eine *Lie-Algebra* über K ist ein K-Vektorraum $\mathfrak{g}$ mit einer Abbildung $(X,Y) \mapsto [X,Y]$, $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, genannt die *Lie-Klammer*, derart, dass für alle $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$, $\alpha \in K$, das Folgende gilt:

(1) $[X,Y] + [X,Z] = [X, Y+Z]$
$[X,Z] + [Y,Z] = [X+Y, Z]$ *(Bilinearität)*
$[\alpha X, Y] = [X, \alpha Y] = \alpha[X,Y]$

(2) $[X,Y] = -[Y,X]$ *(Schiefsymmetrie)*

(3) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ *(Jacobi-Identität)*

Eine *K-Unteralgebra* einer Lie-Algebra ist ein K-linearer Unterraum $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ derart, dass $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ für alle $X,Y \in \mathfrak{h}$ erfüllt ist.

Sind $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ zwei Lie-Algebren, so heißt eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein *Lie-Algebren-Homomorphismus*, falls $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ für alle $X,Y \in \mathfrak{g}$ gilt.

Übung 4.2. Bestimme alle ein- und zweidimensionalen reellen Lie-Algebren bis auf Isomorphie.

Wir haben jetzt zwei Definitionen: Einerseits für *eine* (abstrakte) Lie-Algebra und andererseits für *die* Lie-Algebra einer Matrix-Lie-Gruppe. Die zweite fällt unter die erste:

Proposition 4.8. *Die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ist eine (reelle bzw. komplexe) Lie-Algebra mit dem Kommutator als Lie-Klammer. Die Lie-Algebra einer Matrix-Lie-Gruppe G ist eine reelle Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.*

Beweis. Für $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ muss man nachrechnen, dass die Eigenschaften (1)–(3) für den Kommutator erfüllt sind. Die Aussage für Matrix-Lie-Gruppen gilt dann nach Prop. 4.6. □

Bemerkungen 4.9.

(1) Aus jeder assoziativen K-Algebra[1] A macht man durch den Kommutator $[x,y] = xy - yx$ für $x,y \in A$ eine Lie-Algebra über K. Ist $\mathrm{char}(K) = 0$, so existiert zu jeder Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über K eine assoziative K-Algebra A derart, dass $\mathfrak{g}$ eine Unteralgebra von A (mit dieser Lie-Klammer) ist. Die kleinste solche Algebra ist durch eine entsprechende universelle Eigenschaft eindeutig bestimmt und heißt die *universelle Einhüllende von* $\mathfrak{g}$ (siehe Varadarajan [**6**, §3.2]).

(2) Der *Satz von Ado* besagt, dass jede endlich-dimensionale Lie-Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0 isomorph zu einer K-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(K)$ ist, für ein $n \in \mathbb{N}$. Der Beweis ist recht aufwendig (siehe Varadarajan [**6**, §3.17]).

---

[1]Eine *assoziative K-Algebra* ist ein K-Vektorraum mit einer assoziativen, bilinearen Multiplikation. (Oder äquivalent: Ein Ring A zusammen mit einem Ring-Homomorphismus $K \to A$).

4.1. BEISPIELE

Wir bestimmen die Lie-Algebren der uns bekannten Matrix-Lie-Gruppen.

(1) *Die spezielle lineare Gruppe.* Um die Lie-Algebra $\mathsf{sl}_n(\mathbb{K})$ von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ auszurechnen, brauchen wir ein

Lemma 4.10. *Für* $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ *gilt* $\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$.

Beweis. Falls X diagonalisierbar ist, etwa $X = C \cdot \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot C^{-1}$, so folgt $e^X = C \cdot \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \cdot C^{-1}$ und $\det(e^X) = \prod_{j=1}^n e^{\lambda_j} = e^{\sum_{j=1}^n \lambda_j} = e^{\mathrm{tr}(X)}$. Da die diagonalisierbaren Matrizen dicht in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ sind (Aufg. 3.3), folgt die Behauptung für alle X. □

Ist also $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ mit $\mathrm{tr}(X) = 0$, so folgt $\det(e^{tX}) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit $X \in \mathsf{sl}_n(\mathbb{K})$. Ist umgekehrt $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $\det(e^{tX}) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so gilt $e^{t\,\mathrm{tr}(X)} = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist $t \cdot \mathrm{tr}(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$, also muss $\mathrm{tr}(X) = 0$ gelten. Wir haben also gezeigt:

$$\mathsf{sl}_n(\mathbb{K}) = \left\{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\right\}.$$

(2) *Die orthogonale Gruppe.* Für $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ und $t \in \mathbb{R}$ ist e^{tX} genau dann orthogonal, wenn $(e^{tX})^{-1} = (e^{tX})^T$ gilt, also wenn $e^{tX^T} = e^{-tX}$ gilt. Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist das genau dann der Fall, wenn $X^T = -X$ gilt. Da jede solche Matrix die Spur 0 hat, gilt dann auch $\det(e^{tX}) = 1$. Die Lie-Algebra

$$\mathsf{so}_n(\mathbb{K}) = \left\{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \mid X^T = -X\right\},$$

von $\mathrm{O_n}(\mathbb{K})$ bzw. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$ besteht also gerade aus den schiefsymmetrischen Matrizen. Dass $\mathrm{O_n}(\mathbb{K})$ und $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$ dieselbe Lie-Algebra haben, ist nicht überraschend (nach Prop. 4.3), da $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$ die Einskomponente von $\mathrm{O_n}(\mathbb{K})$ ist. (Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ siehe dazu Aufgabe H1.1.)

(3) *Die unitäre Gruppe.* Analog zum orthogonalen Fall sieht man, dass

$$\mathsf{u}_n = \left\{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \overline{X}^T = -X\right\}$$

die Lie-Algebra der unitären Gruppe U_n ist. Für SU_n erhält man

$$\mathsf{su}_n = \mathsf{u}_n \cap \mathsf{sl}_n(\mathbb{C}) = \left\{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \overline{X}^T = -X \text{ und } \mathrm{tr}(X) = 0\right\}.$$

Übung 4.3. Bestimme explizit die allgemeine Form eines Elements von $\mathsf{so}_3(\mathbb{R})$.

Übung 4.4. Sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Zeige oder widerlege durch ein Gegenbeispiel: Ist $A \in G$ mit $\|A - I\| < 1$, so gilt $\log(A) \in \mathfrak{g}$.

4.2. HOMOMORPHISMEN

Das Hauptergebnis für diese Woche ist die folgende Aussage.

Satz 4.11. *Es seien G und H Matrix-Lie-Gruppen mit Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ und sei $\Phi\colon G \to H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ derart, dass*

$$\Phi(e^X) = e^{\varphi(X)}$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$ erfüllt ist. Diese hat die folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

(1) Es gilt $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$, d.h. φ ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren.
(2) Für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $A \in G$ gilt $\varphi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\varphi(X)\Phi(A)^{-1}$.
(3) Für alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt $\frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})|_{t=0} = \varphi(X)$.

Die Zuordnung $\Phi \to \varphi$ ist funktoriell, d.h. ist K eine weitere Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{k}$ und ist $\Psi\colon H \to K$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus mit zugehörigem Homomorphismus $\psi\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{k}$, so ist $(\psi \circ \varphi)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ der zu $(\Psi \circ \varphi)\colon G \to K$ gehörige Homomorphismus von Lie-Algebren. Ferner gehört zur Identität $\mathrm{id}_G\colon G \to G$ die Identität $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Beweis. Da Φ ein stetiger Homomorphismus ist, ist $\Phi(e^{tX})$ für jedes $X \in \mathfrak{g}$ eine Einparametergruppe in H. Nach Satz 3.10 gibt es also genau eine Matrix $Z \in \mathfrak{h}$ mit $\Phi(e^{tX}) = e^{tZ}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir setzen $\varphi(X) = Z$ und zeigen, dass φ die behaupteten Eigenschaften hat. Wir bemerken zunächst, dass die Definition gerade so gewählt ist, dass (3) erfüllt ist.

Außerdem gilt $\varphi(e^X) = e^{\varphi(X)}$ nach Definition (mit $t = 1$). Wir zeigen, dass φ $\mathbb{R}$-linear ist: Für $s \in \mathbb{R}$ gilt $\Phi(e^{tsX}) = e^{ts\varphi(X)}$ und damit $\varphi(sX) = s\varphi(X)$. Für $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt unter Verwendung der Lieschen Produktformel 3.7

$$\begin{aligned} e^{t\varphi(X+Y)} &= e^{\varphi(t(X+Y))} = \Phi(e^{t(X+Y)}) \\ &= \Phi\Big(\lim_{m\to\infty}(e^{tX/m}e^{tY/m})^m\Big) = \lim_{m\to\infty}\big(\Phi(e^{tX/m})\Phi(e^{tY/m})\big)^m \\ &= \lim_{m\to\infty}(e^{t\varphi(X)/m}e^{t\varphi(Y)/m})^m = e^{t(\varphi(X)+\varphi(Y))}. \end{aligned}$$

Ableiten dieser Gleichheit in $t = 0$ ergibt $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$.
Um (2) zu beweisen, sei $A \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{t\varphi(AXA^{-1})} &= e^{\varphi(tAXA^{-1})} = \Phi(e^{tAXA^{-1}}) = \Phi(Ae^{tX}A^{-1}) = \Phi(A)\Phi(e^{tX})\Phi(A)^{-1} \\ &= \Phi(A)e^{t\varphi(X)}\Phi(A)^{-1}. \end{aligned}$$

Wiederum folgt $\varphi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\varphi(X)\Phi(A)^{-1}$ durch Ableiten in $t = 0$. Also gilt (2).
Wir zeigen (1). Wie oben im Beweis von Prop. 4.6 gesehen, gilt

$$[X,Y] = \frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}\bigg|_{t=0}$$

und damit, unter Verwendung von (2),

$$\begin{aligned} \varphi([X,Y]) &= \varphi\left(\frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}\bigg|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}\varphi\big(e^{tX}Ye^{-tX}\big)\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})\varphi(Y)\Phi(e^{-tX})\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{t\varphi(X)}\varphi(Y)e^{-t\varphi(X)}\bigg|_{t=0} \\ &= [\varphi(X), \varphi(Y)]. \end{aligned}$$

Damit ist (1) bewiesen.

Um die Eindeutigkeit von φ zu zeigen, sei $\widetilde{\varphi}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ eine weitere lineare Abbildung mit $\Phi(e^X) = e^{\widetilde{\varphi}(X)}$. Dann gilt $e^{t\widetilde{\varphi}(X)} = e^{\widetilde{\varphi}(tX)} = \Phi(e^{tX})$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also

$$\widetilde{\varphi}(X) = \frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})\bigg|_{t=0} = \varphi(X)$$

nach Eigenschaft (3).
Es bleibt noch die Funktorialität zu überprüfen. Für $X \in \mathfrak{g}$ gilt

$$(\Psi \circ \Phi)(e^{tX}) = \Psi(\Phi(e^{tX}) = \Phi(e^{t\psi(X)}) = e^{t\psi(\varphi(X))}$$

und damit die Behauptung. Dass id_G gerade zu $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ führt, ist klar nach (3). $\square$

4.3. DIE ADJUNGIERTE ABBILDUNG

Als Vorbereitung auf den Fall abstrakter Lie-Gruppen werfen wir noch einen etwas formaleren Blick auf die Lie-Klammer einer Matrix-Lie-Gruppe.

Definition 4.12. Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Definiere

$$\mathrm{ad}_X\colon \begin{cases} \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ Y & \mapsto & [X,Y] \end{cases}$$

für festes $X \in \mathfrak{g}$ und

$$\mathrm{ad}\colon \begin{cases} \mathfrak{g} & \to & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ X & \mapsto & \mathrm{ad}_X\,. \end{cases}$$

Dabei ist $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Beachte, dass $\mathrm{ad}_X \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ aufgrund der Bilinearität der Lie-Klammer gilt.

Definition 4.13. Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Der Raum $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ wird durch die Definition

$$[f,g] = f \circ g - g \circ f$$

zu einer Lie-Algebra, die wir mit $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ notieren.

Proposition 4.14. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie-Algebra. Die Abbildung* $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren, d.h. es gilt*

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y].$$

Beweis. Man schreibt einfach beide Seiten aus und verwendet Schiefsymmetrie und Jacobi-Identiät: Für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) &= [[X,Y],Z] = -[Z,[X,Y]] \\ &= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] = [\mathrm{ad}_X,\mathrm{ad}_Y](Z).\end{aligned}$$ $\square$

Im Fall von Matrix-Lie-Gruppen können wir ad wesentlich konkreter beschreiben.

Definition 4.15. Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Für $A \in G$ schreibe

$$\mathrm{Ad}_A\colon \begin{cases} \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ X & \mapsto & AXA^{-1}. \end{cases}$$

Es sei $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ die Gruppe der invertierbaren linearen Abbildungen $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{g}$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, sagen wir der Dimension N, ist $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ als Gruppen. In diesem Sinn verstehen wir $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ als Matrix-Lie-Gruppe. Dann ist $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Mat}_N(\mathbb{R})$ genau die Lie-Algebra von $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

Proposition 4.16. *Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$. *Für jedes $A \in G$ gilt* $\mathrm{Ad}_A \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ *mit* $(\mathrm{Ad}_A)^{-1} = \mathrm{Ad}_{A^{-1}}$. *Die Abbildung*

$$\mathrm{Ad}\colon \begin{cases} G & \to & \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \\ A & \mapsto & \mathrm{Ad}_A \end{cases}$$

ist ein Homomorphismus von Lie-Gruppen. Für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt ferner $\mathrm{Ad}_A([X,Y]) = [\mathrm{Ad}_A(X), \mathrm{Ad}_A(Y)]$.

Beweis. Nach Prop. 4.4 gilt $\mathrm{Ad}_A(X) \in \mathfrak{g}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$. Die Abbildung Ad ist offenbar stetig. Das Weitere rechnet man einfach nach. □

Proposition 4.17. *Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$. *Dann ist* $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *gerade der durch* $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ *bestimmte Homomorphismus von Lie-Algebren.*

Beweis. Sei $a\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(G)$ der durch Ad nach Satz 4.11 bestimmte Homomorphismus von Lie-Algebren. Nach 4.11(3) gilt

$$\begin{aligned} a(X)(Y) &= \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(e^{tX})(Y)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{tX} Y e^{-tX}\bigg|_{t=0} \\ &= [X,Y] = \mathrm{ad}_X(Y) \end{aligned}$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$, und damit die Behauptung. □

4.4. NEUE GRUPPE: DIE HEISENBERG-GRUPPE

Die Gruppe der unipotenten reellen oberen Dreiecksmatrizen der Größe 3×3

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

ist eine Matrix-Lie-Gruppe, genannt die *Heisenberg-Gruppe*.

Übung 4.5.
(a) Zeige, dass H zusammenhängend ist.
(b) Bestimme das Zentrum von H.

Übung 4.6.
(a) Bestimme die Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ der Heisenberg-Gruppe H.
(b) Zeige, dass die Exponentialabbildung $\exp\colon \mathfrak{h} \to H$, $X \mapsto e^X$ bijektiv ist.

Übung H4.1. Zeige, dass die folgenden Matrizen eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{su}_2$ bilden:

$$E_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Berechne $[E_1, E_2]$, $[E_2, E_3]$ und $[E_3, E_1]$. Zeige, dass es eine invertierbare lineare Abbildung $\varphi\colon \mathfrak{su}_2 \to \mathbb{R}^3$ gibt derart, dass $\varphi([X,Y]) = \varphi(X) \times \varphi(Y)$ gilt, wobei $\times$ das Kreuzprodukt bezeichnet.

Übung H4.2.
(a) Zeige, dass $\mathfrak{su}_2$ und $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ isomorph sind.
(b) Zeige, dass $\mathfrak{su}_2$ und $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ nicht isomorph sind.
(*Hinweis:* Zeige, dass $\mathfrak{su}_2$ keine 2-dimensionale Unteralgebra besitzt.)

5. DIE EXPONENTIALABBILDUNG

Die Verbindung zwischen den Lie-Gruppen und den Lie-Algebren wird durch die Exponentialabbildung hergestellt, wie etwa in Satz 4.11. In diesem Abschnitt wird die Einschränkung des Matrix-Exponentials auf die Lie-Algebra genauer untersucht.

Definition 5.1. Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die *Exponentialabbildung* von G ist die Abbildung $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$, $X \mapsto e^X$.

Die Exponentialabbildung für $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist surjektiv (nach Aufgabe H3.2), jedoch nicht injektiv. Für allgemeines G ist sie weder injektiv noch surjektiv.

Beispiel 5.2. Es sei $A = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. Behaupte, dass A nicht im Bild der Exponentialabbildung $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ liegt. Denn ist $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ mit zwei verschiedenen komplexen Eigenwerten, dann ist X diagonalisierbar über $\mathbb{C}$ und damit auch e^X. Das ist aber für A bekanntermaßen nicht der Fall. (Denn A hat den doppelten Eigenwert -1. Wäre es diagonalisierbar, dann müsste $A = -I$ gelten.) Hat $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ dagegen einen doppelten Eigenwert, dann muss dieser gleich 0 sein, wegen $\mathrm{tr}(X) = 0$. Dann wäre X nilpotent und e^X uniponent, hätte also einen Eigenwert 1, was ebenfalls nicht der Fall ist.

Übung 5.1. Zeige, dass das Bild der Exponentialabbildung $\exp\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ genau aus $-I$ und allen Matrizen $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{tr}(A) > -2$ besteht.

Übung 5.2. Zeige, dass die Exponentialabbildung für U_n surjektiv, aber nicht injektiv ist. (Insbesondere gibt dies einen neuen Beweis dafür, dass U_n zusammenhängend ist.)

Trotzdem ist die Lage nicht ganz schlecht: Wir zeigen, dass die Exponentialabbildung immerhin *lokal bijektiv* ist. Zunächst eine Ergänzung zu Abschnitt 3:

Proposition 5.3. *Die Exponentialabbildung* $\exp\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *und der Logarithmus* $\log\colon \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \|X - I\| < 1\} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ *sind glatt, und es gilt* $(D\exp)(0) = \mathrm{id}_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})}$. *Insbesondere ist* $\exp$ *lokal um* 0 *ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Der Beweis der Glattheit findet sich etwa in Hilgert-Neeb [**5**, Lemmata 3.1.5, 3.2.1 und 3.3.1]. Die Aussage über die Ableitung in 0 folgt daraus, dass wir schon $\frac{d}{dt}\exp(tX) = X$ für alle $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ gezeigt haben (Prop. 3.9). $\square$

Satz 5.4. *Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$. *Dann gibt es eine offene Umgebung U von 0 in* $\mathfrak{g}$ *und eine offene Umgebung V von I in G derart, dass* $\exp\colon U \to V$ *ein Homöomorphismus ist.*

Beweis. Für $0 < \varepsilon < \log(2)$, sei $U_\varepsilon = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \|X\| < \varepsilon\}$ und $V_\varepsilon = \exp(U_\varepsilon)$. Wir beweisen zunächst die folgende Hilfsaussage:

Es sei (B_m), $m \in \mathbb{N}$, eine Folge in $G \cap V_\varepsilon$ mit $B_m \to I$ und sei $Y_m = \log(B_m)$. Falls Y_m für alle m ungleich Null ist und die Folge $Y_m/\|Y_m\|$ gegen eine Matrix $Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ konvergiert, dann gilt $Y \in \mathfrak{g}$.

Sei also $t \in \mathbb{R}$. Wir müssen $e^{tY} \in G$ zeigen. Aus $B_m \to I$ folgt $Y_m \to 0$ und damit $\|Y_m\| \to 0$. Da $\|Y_m\| \neq 0$ für alle m, gibt es dann eine Folge (k_m) von ganzen Zahlen mit

$k_m \| Y_m \| \to t$. Dann gilt

$$\exp(k_m Y_m) = \exp\left((k_m \| Y_m \|) \frac{Y_m}{\| Y_m \|} \right) \to \exp(tY).$$

Nun ist $\exp(k_m Y_m) = \exp(Y_m)^{k_m} = (B_m)^{k_m} \in G$ für alle m, also $\exp(tY) \in G$, da G abgeschlossen ist. Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Nun zum Beweis der eigentlichen Behauptung. Wir wissen, dass $\exp\colon U_\varepsilon \to V_\varepsilon$ ein Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung log ist. Zu zeigen bleibt also folgendes: Es gibt $\varepsilon \in (0, \log(2))$ derart, dass $\log(A) \in \mathfrak{g}$ für alle $A \in V_\varepsilon \cap G$ gilt.

Es sei $L = \mathfrak{g}^\perp$ das orthogonale Komplement von $\mathfrak{g}$ in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Betrachte die Abbildung $\Phi\colon \mathfrak{g} \oplus L \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$\Phi(X, Y) = e^X e^Y.$$

Wir fassen Φ auf als Abbildung von $\mathbb{R}^{2n^2} \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{g} \oplus L$ auf sich selbst. Dann gilt $\frac{d}{dt}\Phi(tX, 0)\big|_{t=0} = X$, ebenso $\frac{d}{dt}\Phi(0, tY)\big|_{t=0} = Y$ für alle $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in L$. Dies zeigt, dass $(D\Phi)(0,0) = I_{2n^2}$ gilt. Nach dem Satz von der Umkehrabbildung besitzt Φ also lokal um $I = \Phi(0,0)$ eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung.

Angenommen, es gibt kein ε derart, dass $\log(A) \in \mathfrak{g}$ für alle $A \in V_\varepsilon \cap G$ gilt. Dann gibt es eine Folge $A_m \in G$ mit $A_m \to I$ mit $\log(A_m) \notin \mathfrak{g}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Für große m liegt A_m im Definitionsbereich von Φ^{-1}, es gibt also $X_m \in \mathfrak{g}$ und $Y_m \in L$ mit

$$A_m = e^{X_m} e^{Y_m}.$$

mit $X_m \to 0$ und $Y_m \to 0$. Dabei muss $Y_m \neq 0$ für alle m gelten, denn sonst hätten wir $\log(A_m) = X_m \in \mathfrak{g}$, im Widerspruch zur Wahl von (A_m).

Setze $B_m = \exp(-X_m)A_m = \exp(Y_m)$. Dann gilt $B_m \in G$ und $B_m \to I$. Die Folge $Y_m / \| Y_m \|$ enthält eine konvergente Teilfolge, da die Einheitssphäre in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ kompakt ist. Wir gehen zu dieser Teilfolge über und nehmen an, dass $Y_m / \| Y_m \| \to Y \in L$ mit $\| Y \| = 1$. Nun sind wir genau in der Situation der eingangs bewiesenen Hilfssaussage und können $Y \in \mathfrak{g}$ schließen. Das ist aber ein Widerspruch zu $Y \in L \setminus \{0\}$. ☐

Als nächstes zeigen wir, dass das Bild der Expontialabbildung einer zusammenhängenden Gruppe immerhin ausreichend groß ist, um die Gruppe zu erzeugen. Dies folgt aus dem vorangehenden Satz und allgemeinen Überlegungen zu offenen Untergruppen.

Lemma 5.5. *Jede offene Untergruppe einer (Matrix-)-Lie-Gruppe ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei H eine offene Untergruppe einer (Matrix-)Lie-Gruppe G. Es gilt $gH \cap H \neq \emptyset$ für $g \in G$ genau dann, wenn $g \in H$. Da H offen ist und Multiplikation mit g ein Homöomorphismus von G auf sich selbst, ist auch gH offen für alle $g \in G$. Damit ist $\bigcup_{g \in G \setminus H} gH$ als Vereinigung offener Mengen wieder offen. Also ist $H = G \setminus \bigcup_{g \in G \setminus H} gH$ abgeschlossen. ☐

Bemerkung 5.6. Es ist natürlich nicht wahr, dass jede abgeschlossene Untergruppe auch offen ist (siehe etwa $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$). Aus dem Beweis des obigen Lemmas sieht man jedoch, dass jede abgeschlossene Untergruppe von endlichem Index (also mit nur endlich vielen Nebenklassen) offen ist, da ihr Komplement eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen und damit abgeschlossen ist.

Korollar 5.7. *Eine zusammenhängende (Matrix-)Lie-Gruppe besitzt keine echten offenen Untergruppen.*

Beweis. Nach Übung 5.3 hat eine zusammenhängende Gruppe G keine zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen, außer G und $\varnothing$. Da jede offene Untergruppe nach dem obigen Lemma auch abgeschlossen ist und 1 enthält, folgt die Behauptung. □

Übung 5.3. Es sei X ein zusammenhängender topologischer Raum. Dann sind X und $\varnothing$ die einzigen Teilmengen von X, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Proposition 5.8. *Eine zusammenhängende (Matrix-)Lie-Gruppe wird von jeder nicht-leeren offenen Teilmenge erzeugt.*

Beweis. Es sei V eine offene Teilmenge von G, und sei H die von V erzeugte Untergruppe von G. Wegen $V \subset H$ gilt auch $x \cdot V \subset H$ für jedes $x \in H$. Da die Multiplikation mit x von links ein Homöomorphismus von G auf sich ist, ist auch $x \cdot V$ offen. Ist also $x_0 \in V$ und $x \in H$, so ist $xx_0^{-1} \cdot V$ eine offene Umgebung von x, die in H enthalten ist. Damit ist H offen und stimmt somit nach Kor. 5.7 mit G überein. □

Bemerkung 5.9. Die differenzierbare Struktur einer Lie-Gruppe ist in den drei vorangehenden Aussagen nicht benutzt worden. Sie gelten genauso für topologische Gruppen.

Korollar 5.10. *Es sei G eine zusammenhängende Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$. *Zu jedem $A \in G$ existieren $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$ mit*

$$A = e^{X_1} \cdots e^{X_m}.$$

Beweis. Sei U eine offene Umgebung von 0 in $\mathfrak{g}$ und sei $V = \exp(U)$ wie in Satz 5.4. Nach Prop. 5.8 erzeugt V die ganze Gruppe G. Jedes Element von V ist von der Form e^X mit $X \in \mathfrak{g}$. Indem wir U durch $U \cap (-U)$ ersetzen, erreichen wir, dass für $e^X \in V$ mit $X \in U$ auch $(e^X)^{-1} = e^{-X} \in V$ gilt. Also ist jedes Element der von V erzeugten Untergruppe ein Produkt von Elementen aus V. □

Korollar 5.11. *Es seien G, H zwei Matrix-Lie-Gruppen mit Lie-Algebren* $\mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{h}$, *und sei G zusammenhängend. Zwei Lie-Gruppen-Homomorphismen $\Phi_1, \Phi_2 \colon G \to H$ stimmen genau dann überein, wenn die induzierten Homomorphismen $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ übereinstimmen.*

Beweis. Die eine Richtung ist klar. Für die Umkehrung gelte $\varphi_1 = \varphi_2$. Sei $g \in G$. Da G zusammenhängend ist, gibt es $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$ mit $g = e^{X_1} \cdots e^{X_m}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_1(g) &= \Phi_1(e^{X_1}) \cdots \Phi_1(e^{X_m}) = e^{\varphi_1(X_1)} \cdots e^{\varphi_1(X_m)} \\
&= e^{\varphi_2(X_1)} \cdots e^{\varphi_2(X_m)} = \Phi_2(e^{X_1}) \cdots \Phi_2(e^{X_m}) \\
&= \Phi_2(g).
\end{aligned}$$
□

Übung 5.4. Es sei $\Phi \colon G \to H$ ein Homomorphismus zwischen zusammenhängenden Matrix-Lie-Gruppen und sei $\varphi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ der induzierte Homomorphismus von Lie-Algebren. Zeige, dass Φ genau dann surjektiv ist, wenn φ surjektiv ist. Welche Implikationen gelten für Injektivität?

5.1. NEUE GRUPPE: SYMPLEKTISCHE GRUPPE

Definition 5.12. Es sei J die $2n \times 2n$-Blockmatrix $\left[\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Die Menge

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K}) = \left\{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \mid A^T J A = J\right\}.$$

ist eine Matrix-Lie-Gruppe, genannt die *symplektische Gruppe*.

Übung 5.5. Zeige, dass $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K})$ tatsächlich eine Matrix-Lie-Gruppe ist.

Übung 5.6. Es sei $b(x, y) = x^T J y$ für $x, y \in \mathbb{K}^n$. Zeige, dass $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ genau dann in $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K})$ liegt, wenn $b(x, y) = b(Ax, Ay)$ für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ gilt. Die symplektische Gruppe besteht also genau aus den Transformationen, die die symplektische Bilinearform b erhalten.

Übung 5.7. Zeige, dass $\det(A) \in \{1, -1\}$ für alle $A \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{K})$ gilt.

Übung 5.8. Bestimme die Lie-Algebra $\mathsf{sp}_n(\mathbb{K})$ von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K})$ und die Dimension von $\mathsf{sp}_n(\mathbb{K})$.

Übung H5.1. Eine Lie-Algebra g heißt *kommutativ*, wenn $[X, Y] = 0$ für alle $X, Y \in$ g gilt. Zeige, dass eine zusammenhängende Matrix-Lie-Gruppe genau dann kommutativ ist, wenn ihre Lie-Algebra kommutativ ist.

Übung H5.2. Zeige: Die Exponentialabbildung einer zusammenhängenden kommutativen Matrix-Lie-Gruppe ist surjektiv.

6. DIE LIE-ALGEBRA ALS TANGENTIALRAUM

Allgemeine Lie-Gruppen sind glatte Mannigfaltigkeiten mit einer glatten Gruppenstruktur. In diesem Abschnitt wird erklärt (zum Teil ohne Beweise), wie sich Lie-Algebren und Exponentialabbildung verallgemeinern, die wir im bisher nur für Matrix-Lie-Gruppen definiert haben.

6.1. MATRIX-LIE-GRUPPEN ALS LIE-GRUPPEN

Definition 6.1. Eine *glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit* der Dimension k in $\mathbb{R}^m$ ist eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^m$ mit den folgenden Eigenschaften: Es gibt eine Menge $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ mit $M \subset \bigcup \mathcal{U}$ und Diffeomorphismen $\sigma_U \colon U \to W_U$ auf offene Teilmengen $W_U \subset \mathbb{R}^m$ derart, dass

$$\sigma_U(M \cap U) = \{w \in W_U \mid w_{k+1} = \cdots = w_m = 0\}$$

für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt.

Ersetzt man $\mathbb{R}^m$ durch $\mathbb{C}^m$ und 'diffeomorph' durch 'biholomorph', so erhält man den Begriff einer *komplexen einbetteten Untermannigfaltigkeit*.

Eine glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit der Dimension k ist also lokal diffeomorph zu einem k-dimensionalen linearen Unterraum von $\mathbb{R}^m$.

Übung 6.1. Zeige, dass eine glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit eine glatte Mannigfaltigkeit entsprechend der Definition in Abschnitt 2 ist.

Satz 6.2. *Es sei $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und sei $k = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$. Dann ist G eine glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit der Dimension k von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^{2n^2}$ und damit eine k-dimensionale Lie-Gruppe.*

Beweis. Nach Satz 5.4 gibt es eine offene Umgebung U von I in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und eine offene Umgebung W von 0 in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ derart, dass $\exp \colon W \to U$ ein Diffeomorphismus ist (nach Satz 5.3) und mit

$$\log(U \cap G) = \mathfrak{g} \cap W.$$

Zu jedem $A \in G$, betrachte die offene Umgebung $U_A = A \cdot U$ und den Diffeomorphismus $\sigma_A \colon B \mapsto \log(A^{-1}B)$ für $B \in U_A$. Dann gilt $\sigma_A(U_A \cap G) = \mathfrak{g} \cap W$, was zeigt, dass G eine glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit der Dimension k ist. ☐

Korollar 6.3. *Jeder stetige Homomorphismus zwischen Matrix-Lie-Gruppen ist glatt.*

Beweis. Es sei $\Phi \colon G \to H$ stetiger Homomorphismus von Matrix-Lie-Gruppen und $\varphi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ der induzierte Homomorphismus von Lie-Algebren. Sei wieder U eine Umgebung von $I \in G$ wie in Satz 5.4, und für $A \in G$ sei $U_A = A \cdot U$. Für $B \in U_A$ gilt dann $B = A \cdot e^{\log(A^{-1}B)}$ und damit

$$\Phi(B) = \Phi(A)\Phi(e^{\log(A^{-1}B)}) = \Phi(A)e^{\varphi(\log(A^{-1}B))}.$$

Auf U_A ist Φ also eine Komposition der linearen Abbildung φ mit der Exponentialabbildung, dem Logarithmus und der Multiplikation mit $\Phi(A)$ von links. Da alle diese Abbildungen glatt sind, ist Φ damit glatt im Punkt A. □

6.2. DER TANGENTIALRAUM

Definition 6.4. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei

$$\mathcal{C}^\infty(M) = \{f\colon M \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist glatt}\}$$

der Ring der glatten Funktionen von M nach $\mathbb{R}$ (mit der punktweisen Addition und Multiplikation). Es sei $p \in M$ ein Punkt. Eine *Derivation in p* ist definiert als eine lineare Abbildung $X\colon \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ derart, dass für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ das folgende gilt:

(1) $X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$ *(Produktregel)*

(2) Falls $f|_U = g|_U$ auf einer Umgebung U von p, so $X(f) = X(g)$. *(Lokalität)*

Der *Tangentialraum* von M in p ist der Vektorraum $T_p(M)$ aller Derivationen in p (mit der Addition $(X+Y)(f) = X(f) + Y(f)$ für $X, Y \in T_p(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$).

Diese Definition des Tangentialraums ist algebraisch sehr kompakt, aber unanschaulich und ohne unmittelbaren Bezug zur Geometrie. Wir fassen hier kurz die wichtigsten Eigenschaften des Tangentialraums zusammen. Siehe etwa Hall [3] und Bröcker-Jänich [1] für Beweise und weitergehende Erläuterung.

(1) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension k, sei $p \in M$ ein Punkt und $U \subset M$ ein Kartengebiet um p mit Karte $\sigma\colon U \to W \subset \mathbb{R}^k$. Die partielle Ableitung

$$f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} f(p) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f \circ \sigma^{-1}\right)(\sigma(p))$$

für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist eine Derivation in p. Die partiellen Ableitungen $(\partial/\partial x_i)(p)$ für $i = 1, \ldots, k$ bilden eine Basis von $T_p(M)$. Insbesondere hat $T_p(M)$ die Dimension k.

(2) Eine glatte Abbildung $\gamma\colon (-1,1) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ heißt eine *glatte Kurve in M durch p*. Dann ist

$$X_\gamma\colon \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(M) & \to \quad \mathbb{R} \\ \quad f & \mapsto \quad \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0} \end{cases}$$

eine Derivation in p. Außerdem ist die Abbildung $\gamma \to X_\gamma$ surjektiv, d.h. jede Derivation in p ist durch eine glatte Kurve gegeben.

(3) Sei nun M eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$, $p \in M$ ein Punkt und γ eine glatte Kurve in M durch p. Für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt dann[1]

$$X_\gamma(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \gamma'(0) \cdot (\nabla f)(p).$$

Also ist die Derivation X_γ durch $\gamma'(0)$ bestimmt. In dieser Weise können wir $T_p(M)$ als linearen Unterraum von $\mathbb{R}^m$ auffassen, nämlich

$$T_p(M) \cong \{X \in \mathbb{R}^m \mid \text{Es gibt eine glatte Kurve } \gamma \text{ in } M \text{ durch } p \text{ mit } \gamma'(0) = X\}$$

Im Fall einer Matrix-Lie-Gruppe in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ ist der Tangentialraum an die Einheitsmatrix damit ein $\mathbb{R}$-linearer Unterraum von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$. Wir zeigen, dass dieser Unterraum genau die Lie-Algebra ist.

[1] Jedes $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist Einschränkung einer Funktion in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$. In diesem Sinn ist hier $(\nabla f)(p)$ zu verstehen.

Proposition 6.5. *Es sei $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann gilt*

$$\mathfrak{g} = T_I(G).$$

Mit anderen Worten, genau dann liegt eine Matrix $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ in $\mathfrak{g}$, wenn es eine glatte Kurve γ in G durch I gibt derart, dass $X = \gamma'(0)$ gilt.

Beweis. Für $X \in \mathfrak{g}$, setze $\gamma(t) = \exp(tX)$, dann gilt $\gamma(0) = I$ und $\gamma'(0) = X$ nach Prop 3.9. Dies zeigt $\mathfrak{g} \subset T_I(M)$. Für die umgekehrte Inklusion, sei γ eine glatte Kurve in G durch I. Nach Satz 5.4 gilt dann $\log(\gamma(t)) \in \mathfrak{g}$ für $|t|$ hinreichend klein. Damit liegt

$$\left.\frac{d\log(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(\gamma(h)) - 0}{h}$$

in $\mathfrak{g}$, da $\mathfrak{g}$ abgeschlossen ist. Nun ist

$$\log(\gamma(t)) = (\gamma(t) - I) - \frac{(\gamma(t)-I)^2}{2} + \frac{(\gamma(t)-I)^3}{3} + \cdots$$

Durch termweises Ableiten sehen wir, dass wegen $\gamma(0) = I$ alle Terme außer dem ersten in der Ableitung in $t = 0$ verschwinden. Es gilt also

$$\left.\frac{d\log(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0} = \gamma'(0)$$

und damit $\gamma'(0) \in \mathfrak{g}$. □

6.3. DIE TANGENTIALABBILDUNG

Definition 6.6. Es seien M, N zwei glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension k bzw. ℓ, sei $\Phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung und sei $p \in M$ ein Punkt. Die lineare Abbildung

$$(D\Phi)(p)\colon \begin{cases} T_p(M) & \to \quad T_{f(p)}(N) \\ X & \mapsto \quad \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(N) & \to \quad \mathbb{R} \\ f & \mapsto \quad X(f\circ\Phi) \end{cases} \end{cases}$$

heißt die *Tangentialabbildung von* Φ in p.

In Koordinaten ist die Tangentialabbildung gerade durch die Jacobi-Matrix beschrieben. Genauer gilt folgendes: Es seien M, N zwei glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension k bzw. ℓ, sei $\Phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung und sei $p \in M$ ein Punkt. Sind $\sigma\colon U \to W \subset \mathbb{R}^k$ und $\tau\colon V \to Y \subset \mathbb{R}^\ell$ Karten in M bzw. N mit $\sigma(p) = 0$, dann setze $\Psi = (\tau\circ\Phi\circ\sigma^{-1})\colon \sigma(\Phi^{-1}(V)\cap U) \to \tau(V)$. Bezüglich der Basen $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \in T_p(M)$ und $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_\ell} \in T_{\Phi(P)}(N)$ wird die Tangentialabbildung $(D\Phi)(p)$ dann durch die Jacobi-Matrix

$$(D\Psi)(0) = \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\Psi_i(0)\right]_{i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,\ell}$$

der Abbildung Ψ dargestellt.

$$\begin{tikzcd} M \supset U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\sigma"] & V \subset N \arrow[d, "\tau"] \\ \mathbb{R}^k \supset W \arrow[r, "\Psi"] & Y \subset \mathbb{R}^\ell \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_p(M) \arrow[r, "D\Phi(p)"] \arrow[d, "\cong"] & T_p(N) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{R}^k \arrow[r, "D\Psi(0)"] & \mathbb{R}^\ell \end{tikzcd}$$

6.4. DIE EXPONENTIALABBILDUNG

Im Fall einer Matrix-Lie-Gruppe G ist die Lie-Algebra g gerade dadurch charakterisiert, dass $t \mapsto e^{tX}$ für $X \in \mathfrak{g}$ eine Einparameter-Untergruppe von G ist. Außerdem ist jede Einparameter-Untergruppe von dieser Form (Satz 3.10). Dieser Zusammenhang zwischen Lie-Algebra und Einparameter-Untergruppen ist die für die Lie-Thoerie entscheidende Eigenschaft der Exponentialabbildung.

Proposition 6.7. *Es sei G eine Lie-Gruppe mit neutralem Element e. Zu jedem $X \in T_e(G)$ gibt es genau eine glatte Einparameter-Untergruppe $\gamma_X \colon (\mathbb{R}, +) \to G$ mit $\gamma'(0) = X$.*

Beweis. Siehe etwa Fulton-Harris [**2**, §8.3]. □

Definition 6.8. Es sei G eine Lie-Gruppe mit neutralem Element e. Die Abbildung

$$\exp\colon \begin{cases} T_e(G) & \to & G \\ X & \mapsto & \gamma_X(1) \end{cases}$$

heißt die *Exponentialabbildung von G*.

Es ist unmittelbar, dass diese Definition im Fall von Matrix-Lie-Gruppen mit der alten übereinstimmt. Man muss nun beweisen, dass die allgemeine Exponentialabbildung glatt ist und die üblichen Eigenschaften besitzt.

Proposition 6.9. *Es seien G und H Lie-Gruppen und sei $\Phi\colon G \to H$ ein glatter Homomorphismus. Die Tangentialabbildung $\varphi = (D\Phi)(e)$ ist gerade die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $T_e(G) \to T_e(H)$ mit $\exp(\varphi(X)) = \Phi(\exp(X))$ für alle $X \in T_e(G)$.*

Beweis. Es sei $X \in T_e(G)$ und γ_X die durch X bestimmte Einparameter-Untergruppe von G. Dann ist $\Phi \circ \gamma_X$ eine Einparameter-Untergruppe von H mit $(\Phi \circ \gamma_X)'(0) = \varphi(X)$. Also gilt $\Phi(\exp(X)) = \Phi(\gamma_X(1)) = (\Phi \circ \gamma_X)(1) = \gamma_{\varphi(X)}(1) = \exp(\varphi(x))$. □

6.5. DIE LIE-ALGEBRA EINER LIE-GRUPPE

Es sei G eine Lie-Gruppe der Dimension n mit neutralem Element e. Wir definieren auf dem Tangentialraum $T_e(G)$ die Struktur einer Lie-Algebra wie folgt: Für $x \in G$, sei $\Phi_x\colon G \to G$ die glatte Abbildung $y \mapsto xyx^{-1}$ und sei $\mathrm{Ad}_x\colon T_e(G) \to T_e(G)$ die Tangentialabbildung von Φ_x in e. Für jedes $x \in G$ ist Ad_x invertierbar mit $(\mathrm{Ad}_x)^{-1} = \mathrm{Ad}_{x^{-1}}$. Wir erhalten also einen Homomorphismus $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(T_e(G))$. Dieser ist wiederum glatt. Der Tangentialraum von $\mathrm{GL}(T_e(G))$ an $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ ist $\mathrm{End}(T_e(G))$ (so wie $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ der Tangentialraum an I in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist). Wir erhalten also zu Ad wiederum eine Tangentialabbildung

$$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(T_e(G)).$$

Proposition 6.10. *Der Tangentialraum $T_e(G)$ wird mit der Lie-Klammer*

$$[X, Y] = \mathrm{ad}_X(Y)$$

zu einer Lie-Algebra, genannt die Lie-Algebra von G.
Ist $\Phi\colon G \to H$ ein glatter Homomorphismus, so ist die Tangentialabbildung $(D\Phi)(e)\colon T_e(G) \to T_e(H)$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren.

Beweis. Siehe Varadarajan [**6**, §2.3]. □

Im Fall von Matrix-Lie-Gruppen haben wir wieder nichts Neues definiert:

Proposition 6.11. *Es seien G und H Matrix-Lie-Gruppen mit Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ und sei $\Phi: G \to H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann ist der durch Φ nach Satz 4.11 induzierte Homomorphismus von Lie-Algebren gerade die Tangentialabbildung $(D\Phi)(I)$.*

Beweis. Das folgt aus Prop. 6.9, da der induzierte Homomorphismus $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ nach Satz 4.11 durch die Eigenschaft $\Phi(\exp(X)) = \exp(\varphi(X))$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ bestimmt ist. □

Damit sehen wir nun auch, dass die neue und die alte Definition der Lie-Klammer für Matrix-Lie-Gruppen übereinstimmen. Denn Ad ist in diesem Fall gerade durch $\mathrm{Ad}(A): X \mapsto AXA^{-1}$ für $A \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ gegeben und stimmt damit mit der Definition von Ad in 4.15 überein. Nach Prop. 4.17 ist ad für Matrix-Lie-Gruppen gerade der durch Ad bestimmte Homomorphismus von Lie-Algebren und damit deren Tangentialabbildung. Dies zeigt auch die explizite Rechnung im Beweis von Prop. 4.17: Sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_I(G)$ und seien $X, Y \in \mathfrak{g}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(X)(Y) &= \frac{d}{dt}(\mathrm{Ad}(e^{tX})(Y))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e^{tX}Ye^{-tX})\Big|_{t=0}\\ &= XY - YX.\end{aligned}$$

6.6. KOMPLEXE LIE-GRUPPEN

Eine Matrix-Lie-Gruppe, die eine komplexe eingebettete Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ ist, bezeichnen wir als *komplexe Matrix-Lie-Gruppe.* Sie ist dann eine komplexe Lie-Gruppe entsprechend der Definition in Abschnitt 2.

Proposition 6.12. *Genau dann ist eine Matrix-Lie-Gruppe $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ komplex, wenn ihre Lie-Algebra $g \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ ein $\mathbb{C}$-linearer Unterraum von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ ist, also genau dann, wenn $iX \in \mathfrak{g}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt.*

Beweisskizze. Der Tangentialraum einer komplexen eingebetteten Untermannigfaltigkeit ist ein $\mathbb{C}$-linearer Unterraum. Dazu geht man analog zum reellen Fall vor und betrachtet $\mathbb{C}$-lineare Derivationen[2]. Ist umgekehrt die Lie-Algebra ein $\mathbb{C}$-linearer Unterraum, so verwendet man, dass die Matrix-Exponentialfunktion lokal biholomorph ist, um zu zeigen, dass G eine komplexe eingebettete Untermannigfaltigkeit ist. □

Beispiel 6.13. Die unitäre Gruppe U_n ist als Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ definiert. Sie ist jedoch *keine* komplexe Lie-Gruppe. Wir haben schon gesehen, dass $U_1 \cong S^1$ ungerade reelle Dimension hat und deshalb keine komplexe Mannigfaltigkeit sein kann. Mit Prop. 6.12 sehen wir jetzt einen präzisen Grund für alle n: Die Lie-Algebra

$$\mathfrak{u}_n = \left\{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \overline{X}^T = -X\right\}$$

ist kein $\mathbb{C}$-linearer Unterraum. Denn es gilt z.B. $i \cdot I_n \in \mathfrak{g}$, aber $i \cdot (i \cdot I_n) = -I_n \notin \mathfrak{g}$.

Übung 6.2. Zeige, dass $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ komplexe Matrix-Lie-Gruppen sind.

Übung 6.3. Bestimme die Dimension der Lie-Gruppen $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$, U_n und SU_n über die Dimension ihrer Lie-Algebren.

[2]Nicht jede in einer Umgebung eines Punktes definierte holomorphe Funktion setzt sich zu einer holomorphen Funktion auf der ganzen Mannigfaltigkeit fort. Daher muss man die Definition der Derivationen geeignet modifizieren.

7. HOMOMORPHISMEN

Wir wissen, dass jeder Homomorphimus $\Phi\colon G \to H$ von Lie-Gruppen einen Homomorphismus $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ der zugehörigen Lie-Algebren bestimmt, der durch die Eigenschaft

$$\Phi(e^X) = e^{\varphi(X)}$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$ eindeutig festgelegt ist. (Wir wissen nun auch, dass dieses φ geometrisch gerade die Tangentialabbildung von Φ ist.)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Um die Korrespondenz zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren zu vervollständigen, hätte man gern auch die umgekehrte Richtung: Also gegeben Lie-Gruppen G, H mit Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ und gegeben ein Lie-Algebren-Homomorphismus $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, dann hätte man gern einen Lie-Gruppen-Homomorphismus $\Phi\colon G \to H$ mit $\Phi(\exp(X)) = \exp(\varphi(X))$ für $X \in \mathfrak{g}$.

Im allgemeinen ist das leider nicht möglich. Die gewünschte Eigenschaft mit dem Exponential führt aber zu einem Ansatz. In einer kleinen Umgebung U von 1 in G ist die Exponentialabbildung bijektiv mit Umkehrabbildung log. Dort muss also

$$\Phi(x) = e^{\varphi(\log(x))}$$

gelten. Diese Gleichung kann man auf U als Definition von Φ hernehmen. Um daraus tatsächlich einen Homomorphismus zu basteln, muss man zwei Probleme lösen:

(1) Es soll $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ für alle $x, y \in U$ gelten.
(2) Falls (1) gilt, soll der *lokale Homomorphismus* Φ von U auf G fortgesetzt werden.

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt zunächst mit dem ersten Problem. Die Schwierigkeit besteht offenbar wieder einmal darin, dass $e^X e^X = e^{X+Y}$ im allgemeinen nicht zu gelten braucht, wenn X und Y nicht vertauschen. Mit anderen Worten, im allgemeinen ist $\log(e^X e^Y) \neq X + Y$. Der genaue Unterschied zwischen der linken und der rechten Seite wird durch einen der zentralen Sätze über die Exponentialabbildung beschrieben, die sogenannte Baker-Campbell-Hausdorff-Formel. Wir beschränken die Aussagen und vor allem die Beweise auf den Fall von Matrix-Lie-Gruppen. Sie gelten aber auch im allgemeinen.

Definition 7.1. Es seien $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $\|X\|, \|Y\| < \frac{1}{2}\log(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$. Wir definieren

$$X * Y = \log(e^X e^Y).$$

Übung 7.1. Zeige: Aus $\|X\|, \|Y\| < \frac{1}{2}\log(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ folgt $\|e^X e^Y - I\| < 1$.

Die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (BCH-Formel) ist eine explizite Reihendarstellung von $X * Y$. Die ersten Terme sehen so aus:

$$X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \cdots \tag{7.2}$$

Die Pünktchen sollen nicht suggerieren, dass man den Rest der Reihenentwicklung leicht raten könnte. Es handelt sich aber um weitere Ausdrücke von ineinander geschachtelten Kommutatoren. Wie diese Darstellung genau aussieht, ist dabei im Grunde weniger wichtig als die Tatsache, dass sie existiert. Die sinngemäße Aussage der BCH-Formel ist also:

Es gibt eine Reihenentwicklung von $X * Y$, in der jeder Term rekursiv aus Kommutatoren in X und Y gebildet ist.

Es ist technisch bequemer, statt mit einer Reihenentwicklung mit einer Integraldarstellung zu arbeiten, die wir nun angeben. Erinnerung: Für $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ bezeichnet ad_X die lineare Abbildung $Y \mapsto [X, Y]$.

Satz 7.3 (Integralform der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel). *Es seien $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $\|X\|, \|Y\| < \frac{1}{2}\log(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$. Dann gilt*

$$X * Y = X + \int_0^1 r(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\,\mathrm{ad}_Y})(Y)\,dt$$

wobei

$$r(z) = \frac{z \log z}{z-1} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}(z-1)^k \quad \textit{für } \|z - 1\| < 1.$$

Dabei wird $\mathrm{ad}_X\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ als lineare Abbildung (nach Wahl einer Basis also als $n^2 \times n^2$-Matrix) aufgefasst. In diesem Sinn ist $\exp(\mathrm{ad}_X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{ad}_X)^m}{m!}$ zu verstehen. Den Beweis verschieben wir auf später (Abschnitt 9). Zunächst die wichtigste Folgerung:

Proposition 7.4. *Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und sei $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Dann gibt es eine Umgebung V von 0 in $\mathfrak{g}$ mit*

$$X * Y \in \mathfrak{g} \qquad \textit{und} \qquad \varphi(X * Y) = \varphi(X) * \varphi(Y)$$

für alle $X, Y \in V$.

Beweis. Seien $X, Y \in \mathfrak{g}$ mit $\|X\|, \|Y\| < \frac{1}{2}\log(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$. Da $\mathrm{ad}_Z(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ für alle $Z \in \mathfrak{g}$ gilt, ist auch $r(\exp(\mathrm{ad}_X)\exp(t\,\mathrm{ad}_Y))(Y) \in \mathfrak{g}$. Aus Satz 7.3 folgt damit $X * Y \in \mathfrak{g}$. Es bleibt $\varphi(X * Y) = \varphi(X) * \varphi(Y)$ zu zeigen. Das sieht man wie folgt: Da φ ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist, gilt $\varphi[X, Y] = [\varphi(X), \varphi(Y)]$. In ad-Schreibweise bedeutet dies

$$\varphi(\mathrm{ad}_Y(X)) = \mathrm{ad}_{\varphi(Y)}(\varphi(X))$$

und damit induktiv

$$\varphi\big((\mathrm{ad}_Y)^n(X)\big) = (\mathrm{ad}_{\varphi(Y)})^n(\varphi(X)).$$

Da das Integral linear ist und über eine Reihe in solchen Ausdrücken läuft, sieht man, dass φ sich durch den ganzen Ausdruck durchzieht. Genauer gilt

$$\begin{aligned}\varphi\big(e^{t\,\mathrm{ad}_Y}(X)\big) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}\varphi\big((\mathrm{ad}_Y)^m(X)\big)\\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}(\mathrm{ad}_{\varphi(Y)})^m(\varphi(X))\\ &= e^{t\,\mathrm{ad}_{\varphi(Y)}}(\varphi(X)).\end{aligned}$$

Analog sieht man

$$\varphi\big(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\,\mathrm{ad}_Y}(Y)\big) = e^{\mathrm{ad}_{\varphi(X)}} e^{t\,\mathrm{ad}_{\varphi(Y)}}(\varphi(Y)).$$

Die Funktion r ist analytisch auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 1\}$ und hat deshalb eine Reihenentwicklung

$$r(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-1)^m$$

für gewisse $a_m \in \mathbb{C}$ (siehe unten). Sind $\|X\|$ und $\|Y\|$ hinreichend klein, damit die BCH-Formel auf X, Y und $\varphi(X)$, $\varphi(Y)$ angewendet werden kann, so erhalten wir wie gewünscht

$$\begin{aligned}\varphi(X*Y) &= \varphi(X) + \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi\big((e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\,\mathrm{ad}_Y} - I)^m(Y)\big)dt \\ &= \varphi(X) + \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} a_m (e^{\mathrm{ad}_{\varphi(X)}} e^{t\,\mathrm{ad}_{\varphi(Y)}} - I)^m(\varphi(Y))dt \\ &= \varphi(X) * \varphi(Y).\end{aligned}$$ □

Damit erreichen wir das Ziel für diesen Abschnitt.

Korollar 7.5. *Es seien G und H Matrix-Lie-Gruppen mit Lie-Algebren* $\mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{h}$ *und sei* $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Sei U' eine offene Umgebung von I in G und sei $\Phi\colon U' \to H$ eine Abbildung mit*

$$\Phi(e^X) = e^{\varphi(X)}$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$ mit $e^X \in U'$. Dann gibt es eine Umgebung $U \subset U'$ von I in G derart, dass Φ auf U stetig ist und

$$\Phi(AB) = \Phi(A)\cdot\Phi(B)$$

für alle $A, B \in U$ gilt.

Beweis. Es sei V eine Umgebung von 0 in $\mathfrak{g}$ wie in Prop. 7.4 mit $V \subset U'$ und so klein, dass $\exp\colon V \to U$ mit $U = \exp(V)$ bijektiv ist. Es gilt dann $\Phi(A) = \exp(\varphi(\log(A))$ für $A \in U$, so dass Φ auf U stetig ist. Seien $A, B \in U$, etwa $A = e^X$, $B = e^Y$ mit $X, Y \in \mathfrak{g}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Phi(AB) &= \Phi(e^X e^Y) = e^{\varphi(X*Y)} = e^{\varphi(X)*\varphi(Y)} \\ &= e^{\varphi(X)} e^{\varphi(Y)} = \Phi(e^X)\Phi(e^Y) \\ &= \Phi(A)\Phi(B).\end{aligned}$$ □

Wir diskutieren noch kurz die Herleitung der ersten Terme der Reihenentwicklung von $X * Y$ in Gleichung 7.2. Dazu bestimmen wir einfach ausreichend viele Terme der beteiligten Reihen und rechnen alles aus. Zunächst überlegt man sich, dass

$$r(z) = \frac{z\log z}{z-1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m(m+1)}(z-1)^m = 1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{6}(z-1)^2 + \cdots.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\,\mathrm{ad}_Y} - I &= \left(I + \mathrm{ad}_X + \frac{(\mathrm{ad}_X)^2}{2} + \cdots\right)\left(I + t\,\mathrm{ad}_Y + \frac{t^2(\mathrm{ad}_Y)^2}{2} + \cdots\right) - I \\ &= \mathrm{ad}_X + t\,\mathrm{ad}_Y + t\,\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y + \frac{(\mathrm{ad}_X)^2}{2} + \frac{t^2(\mathrm{ad}_Y)^2}{2} + \cdots\end{aligned}$$

Durch Einsetzen sehen wir

$$\begin{aligned}r(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\,\mathrm{ad}_Y}) =& I + \frac{1}{2}\mathrm{ad}_X + \frac{t}{2}\mathrm{ad}_Y + \frac{t}{2}\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y + \frac{(\mathrm{ad}_X)^2}{4} + \frac{t^2(\mathrm{ad}_Y)^2}{4} \\ & - \frac{1}{6}\big((\mathrm{ad}_X)^2 + t^2(\mathrm{ad}_Y)^2 + t\,\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y + t\,\mathrm{ad}_Y\,\mathrm{ad}_X\big) \\ & + \text{Terme höherer Ordnung in } t.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
X * Y &= X + \int_0^1 r(e^{\operatorname{ad}_X} e^{t \operatorname{ad}_Y})(Y) dt \\
&= X + \int_0^1 \left(Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{4}[X, [X, Y]] - \frac{1}{6}[X, [X, Y]] - \frac{t}{6}[Y, [X, Y]] + \cdots \right) dt \\
&= X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{6} \int_0^1 t dt [Y, [X, Y]] + \cdots \\
&= X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \cdots.
\end{aligned}
$$

Übung H7.1. Betrachte die Abbildung $\operatorname{ad}_X \colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, $\operatorname{ad}_X(Y) = [X, Y]$.
Zeige: Falls X diagonalisierbar ist, so ist auch ad_X diagonalisierbar.

Übung H7.2. Für kommutierende Matrizen $X, Y \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ gilt $X * Y = X + Y$.
Verifiziere direkt, dass auch die rechte Seite der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel in Satz 7.3 in diesem Fall gleich $X + Y$ ist, für $\|X\|, \|Y\|$ hinreichend klein.

8. EINFACH ZUSAMMENHÄNGENDE GRUPPEN

Es seien G und H zwei Lie-Gruppen mit zugehörigen Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ und sei $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Wir gehen weiter der Frage nach, ob φ durch einen Homomorphismus $\Phi\colon G \to H$ von Lie-Gruppen induziert ist. Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass ein solches Φ zumindest lokal in einer Umgebung der Eins konstruiert werden kann (Kor. 7.5). Als nächstes wird gezeigt, dass ein lokaler Homomorphimus auf ganz G fortgesetzt werden kann, falls G einfach zusammenhängend ist.

Zur Erinnerung (Abschnitt 2.4): Ein topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, wenn seine Fundamentalgruppe trivial ist. Per Definition bedeutet dies, dass X zusammenhängend ist und alle geschlossenen Wege in X homotopieäquivalent zu einem Punkt sind. Tatsächlich sind in diesem Fall je zwei Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten (also zwei stetige Wege $\varphi, \psi\colon [0,1] \to X$ in X mit $\varphi(0) = \psi(0)$ und $\varphi(1) = \psi(1)$) homotopieäquivalent (vgl. Def. 2.23).

Satz 8.1. *Es seien G und H Lie-Gruppen und sei G einfach zusammenhängend. Sei U eine offene Umgebung der Eins in G und $\Phi\colon U \to H$ eine stetige Abbildung mit $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ für alle $x, y \in U$. Dann setzt Φ eindeutig zu einem Homomorphismus $\Phi\colon G \to H$ von Lie-Gruppen fort.*

Beweisskizze. Sei $x \in G$ und sei $e \in G$ das neutrale Element. Da G zusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Weg $x(t)\colon [0,1] \to G$, mit $x(0) = e$ und $x(1) = x$. Ferner gibt es eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = 1$ von $[0,1]$ derart, dass

$$(*) \qquad x(s)x(r)^{-1} \in U \quad \text{falls} \quad t_{i-1} \leqslant r \leqslant s \leqslant t_i$$

für alle $i = 1, \dots, k$ gilt (siehe Aufgabe H8.1). Wegen $x(t_k) = x$ gilt

$$x = (x(t_k)x(t_{k-1})^{-1})(x(t_{k-1})x(t_{k-2})^{-1})\cdots(x(t_2)x(t_1)^{-1})x(t_1)$$

und jeder Faktor liegt in U. Wir definieren also

$$(8.2) \qquad \Phi(x) = \Phi(x(t_k)x(t_{k-1})^{-1})\Phi(x(t_{k-1})x(t_{k-2})^{-1})\cdots\Phi(x(t_2)x(t_1)^{-1})\Phi(x(t_1)).$$

Wir müssen nun zeigen, dass die Definition von $\Phi(x)$ nicht von der Wahl des Weges $x(t)$ sowie von der Unterteilung $t_1, \dots, t_k$ von $[0,1]$ abhängt.

Unabhängigkeit von der Wahl der Unterteilung. Beachte zunächst, dass jede Verfeinerung einer Unterteilung mit der Eigenschaft $(*)$ wieder die Eigenschaft $(*)$ besitzt. Da Φ auf U multiplikativ ist, gilt

$$\Phi(x(t_i)x(r)^{-1})\Phi(x(r)x(t_{i-1})^{-1})) = \Phi(x(t_i)x(t_{i-1})^{-1})$$

für alle $r \in [t_{i-1}, t_i]$. Daraus folgt, dass sich die Definition von Φ nicht ändert, wenn wir die Unterteilung durch Einfügen von r zwischen t_{i-1} und t_i verfeinern. Da je zwei Unterteilungen eine gemeinsame Verfeinerung besitzen (nämlich ihre Vereinigung), folgt daraus bereits die Unabhängigkeit von der Wahl der Unterteilung.

Unabhängigkeit von der Wahl des Weges. Es seien x_0 und x_1 zwei stetige Wege in G mit $x_0(0) = x_1(0) = e$ und $x_0(1) = x_1(1) = x$. Da G einfach zusammenhängend ist, sind x_0 und

x_1 homotope Wege, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $X\colon [0,1]\times[0,1]\to G$ mit

$$x_0(t) = X(0,t) \quad \text{und} \quad x_1(t) = X(1,t) \qquad \text{für alle } t\in[0,1],$$

wobei die Endpunkte festbleiben, d.h. $X(s,0) = e$ und $X(s,1) = x$ für alle $s \in [0,1]$ (vgl. Def. 2.23). Wir werden die Homotopie von x_0 nach x_1 geeignet an die Umgebung U anpassen, auf der Φ multiplikativ ist.

Da $[0,1]^2$ kompakt ist, gibt es eine natürliche Zahl N mit $X(s,t)X(s',t')^{-1}\in U$, sobald $|s-s'|<2/N$ und $|t-t'|<2/N$. Wir definieren Wege $y_{k,\ell}:[0,1]\to G$ wie folgt:

$$y_{k,\ell}(t) = \begin{cases} X((k+1)/N, t) & \text{für } t\in[0,(\ell-1)/N] \\ X((k+\ell)/N - t, t) & \text{für } t\in[(\ell-1)/N, \ell/N] \\ X(k/N, t) & \text{für } t\in[\ell/N, 1] \end{cases}$$

für $k = 0,\dots,N-1$ und $\ell = 0,\dots,N$. Für $\ell = 0$ sind die ersten beiden Intervalle leer bzw. liegen außerhalb von $[0,1]$ und es kommt nur die dritte Bedingung zum Tragen. Damit ist $y_{k,0}(t) = X(k/N,t)$ und insbesondere $y_{0,0} = x_0$.

Wir wollen nun zeigen, dass $\Phi(x)$ berechnet wie in (8.2) entlang $y_{k,\ell}$ dasselbe ergibt wie entlang $y_{k,\ell+1}$. Wir haben schon gezeigt, dass die Unterteilung keine Rolle spielt. Wir wählen entlang beider Wege die Unterteilung

$$0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{\ell-1}{N}, \frac{\ell+1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}.$$

Diese Unterteilung besitzt nach Wahl von N die Eigenschaft $(*)$. Da sich $y_{k,\ell}$ und $y_{k,\ell+1}$ in diesen Punkten nicht unterscheiden, ergibt (8.2) für beide dasselbe. Analog zeigt man, dass sich von $y_{k,N}$ zu $y_{k+1,0}$ nichts ändert. So gelangt man induktiv von x_0 zu $y_{N-1,N}$ und schließlich von $y_{N-1,N}$ zu x_1.

Es bleibt zu zeigen, dass Φ ein Homomorphismus ist. Seien $x,y\in G$, dann müssen wir $\Phi(xy)=\Phi(x)\Phi(y)$ zeigen. Seien dazu $x(t), y(t)$ stetige Wege in G mit $x(0)=y(0)=e$, $x(1)=x$ und $y(1)=y$. Betrachte den Weg z gegeben durch $z(t)=x(2t)$ für $0\leqslant t\leqslant \frac12$ und $z(t) = x\cdot y(2t-1)$ für $\frac12\leqslant t\leqslant 1$. (D.h. also, z läuft von e nach xy über x.) Es sei $t_0,\dots,t_k$ eine Unterteilung mit der Eigenschaft $(*)$ für $x(t)$ und $s_0,\dots,s_\ell$ eine entsprechende Unterteilung für $y(t)$. Dann ist

$$\frac{t_0}{2},\dots,\frac{t_k}{2},\frac{1+s_0}{2},\dots,\frac{1+s_\ell}{2}$$

eine Unterteilung mit der Eigenschaft $(*)$ für $z(t)$. Nun berechnet man $\Phi(xy)$ entlang $z(t)$ gemäß (8.2) und erhält $\Phi(xy)=\Phi(x)\Phi(y)$.

Da G zusammenhängend ist, wird G von U erzeugt. (Dies haben wir in Kor. 5.10 gezeigt; es folgt auch erneut aus Aufgabe H8.1). Deshalb ist Φ eindeutig bestimmt. Nach Konstruktion ist Φ stetig auf G und damit ein Homomorphismus von Lie-Gruppen. □

Korollar 8.3. *Es seien G und H Lie-Gruppen mit Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ und sei $\varphi\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Falls G einfach zusammenhängend ist, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\Phi\colon G\to H$ von Lie-Gruppen, der φ induziert, also $\Phi(\exp(X))=\exp(\varphi(X))$ für alle $X\in\mathfrak{g}$ erfüllt.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur im Fall von Matrix-Lie-Gruppen. Es sei U' eine Umgebung von $I\in G$ derart, dass $\exp\colon\exp^{-1}(U')\cap\mathfrak{g}\to U'$ bijektiv ist. Wir definieren

$$\Phi(A) = \exp\big(\varphi(\log(A))\big)$$

für $A \in U'$. Nach Kor. 7.5 existiert eine ggf. kleinere Umgebung $U \subset U'$, auf der Φ multiplikativ ist. Dann zeigt der vorangehende Satz, dass Φ eindeutig zu einem Homomorphismus $\Phi\colon G \to H$ fortsetzt. Da $\Phi = \exp \circ \varphi \circ \log$ auf U gilt, folgt

$$\frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{t\varphi(X)}\bigg|_{t=0} = \varphi(X)$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$. Also ist φ der durch Φ induzierte Homomorphismus von Lie-Algebren und hat damit die Eigenschaft $\Phi(e^X) = e^{\varphi(X)}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$. Da die Exponentialabbildung auf U bijektiv ist, ist Φ auf U' eindeutig bestimmt und damit insgesamt eindeutig. □

Korollar 8.4. *Es seien G und H einfach zusammenhängende Lie-Gruppen mit Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$. Falls $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ isomorph sind, so auch G und H.*

Beweis. Sei $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Isomorphismus von Lie-Algebren. Nach dem vorigen Korollar gibt es Homomorphismen $\Phi\colon G \to H$ bzw. $\Psi\colon H \to G$ die φ bzw. φ^{-1} induzieren. Dann induziert $\Phi \circ \Psi$ den Lie-Algebren-Homomorphismus $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. Aus der Eindeutigkeit in Kor. 8.3 folgt $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_G$, analog $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_H$. □

Zunächst ist Satz 8.3 nur für einfach zusammenhängende Lie-Gruppen von Nutzen. Allerdings gehört zu jeder Lie-Gruppe eine einfach zusammenhängende Gruppe mit derselben Lie-Algebra.

Satz 8.5. *Es sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe. Dann gibt es eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe $\widetilde{G}$ zusammen mit einem Homomorphismus $\Phi\colon \widetilde{G} \to G$ derart, dass der induzierte Homomorphismus $\varphi\colon \widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ von Lie-Algebren ein Isomorphismus ist.* □

Definition 8.6. Die Gruppe $\widetilde{G}$ heißt die *universelle Überlagerung* von G.

Die universelle Überlagerung ist eindeutig bis auf Isomorphie (Aufgabe H8.2). Wir werden später auf den obigen Satz zurückkommen und auch den Beweis skizzieren (Satz 9.9). Ein wesentlicher Punkt ist dabei, dass die universelle Überlagerung einer Matrix-Lie-Gruppe nicht unbedingt eine Matrix-Lie-Gruppe sein muss.

Beispiel 8.7. Die Gruppe $S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$ ist nicht einfach zusammenhängend (denn ihre Fundamentalgruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}$; vgl. Beispiel 2.26). Ihre universelle Überlagerung ist gerade $\Phi\colon (\mathbb{R}, +) \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$. (Die Lie-Algebra beider Gruppen ist einfach $\mathbb{R}$ mit der trivialen Lie-Klammer und der induzierte Homomorphismus φ ist nicht null, damit ein Isomorphismus).

Übung H8.1. Es sei G eine Lie-Gruppe mit neutralem Element e, U eine offene Umgebung von e in G und $x\colon [0,1] \to G$ ein stetiger Weg in G mit $x(0) = e$. Zeige: Es gibt $k \geqslant 1$ und $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = 1$ derart, dass $x(s)x(r)^{-1} \in U$ für alle $t_{i-1} \leqslant r \leqslant s \leqslant t_i$ und alle $i = 1, \ldots, k$ gilt.

Übung H8.2. Sei G zusammenhängende Lie-Gruppe mit universeller Überlagerung $\Phi\colon \widetilde{G} \to G$.

(a) Zeige, dass Φ surjektiv ist.
(b) Zeige: Ist $\Phi'\colon \widetilde{G}' \to G$ eine universelle Überlagerung von G, so gibt es einen Isomorphismus $\Psi\colon \widetilde{G} \xrightarrow{\sim} \widetilde{G}'$ mit $\Phi = \Phi' \circ \Psi$.

9. DIE BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-FORMEL UND ÜBERLAGERUNGEN VON LIE-GRUPPEN

Wir schließen an die vorhergehenden beiden Abschnitte an und beweisen zunächst die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel. Eine ihre Konsequenzen ist die Existenz eines lokalen Homomorphismus von Lie-Gruppen zu gegebenem Homomorphismus von Lie-Algebren (Kor. 7.5). Dieses Resultat haben wir benutzt, um die vollständige Korrespondenz zwischen Lie-Gruppen- und Lie-Algebren-Homomorphismen im Fall einfach zusammenhängender Gruppen herzustellen (Kor. 8.3). In diesem Zusammenhang diskutieren wir nun die Überlagerungstheorie für Lie-Gruppen.

9.1. BEWEIS DER BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-FORMEL

Ziel ist der Beweis der Integralform der BCH-Formel (Satz 7.3).

Satz (Integralform der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel).
Es seien $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ *mit* $\|X\|, \|Y\| < \frac{1}{2}\log(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$. *Dann gilt*

$$\log(e^X e^Y) = X + \int_0^1 r(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\,\mathrm{ad}_Y})(Y)\,dt$$

mit $r(z) = (z\log z)(z-1)^{-1}$.

Zunächst bekommt die ganze Funktion $r(z)$ im Integrand noch ein Gegenstück:

Lemma 9.1. *Betrachte die Funktionen*

$$r(z) = \frac{z\log z}{z-1} = z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}(z-1)^k \quad \text{für } |z-1| < 1,$$
$$s(z) = \frac{1-e^{-z}}{z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}z^k \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Es gilt

$$r(e^X)s(X) = I \quad \text{für } X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \text{ mit } \|X\| < \log(2).$$

Beweis. Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \log(2)$, so folgt $|e^z - 1| < 1$ und damit $\log(e^z) = z$, also

$$r(e^z)s(z) = \frac{e^z z}{e^z - 1}\cdot\frac{1-e^{-z}}{z} = \frac{e^z(1-e^{-z})}{e^z(1-e^{-z})} = 1.$$

Ist nun $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $\|X\| < \log(2)$, so folgt ebenso $\|e^X - I\| < 1$ (nach Übung 3.4), so dass $r(e^X)$ und $s(X)$ wohldefiniert sind und $r(e^X)s(X) = I$ folgt. □

Desweiteren brauchen wir eine Formel für das Differential der Exponentialfunktion. Dazu berechnen wir die Ableitung entlang einer beliebigen glatten Kurve in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Proposition 9.2. *Es sei* $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ *eine glatte Kurve. Dann gilt*

$$\frac{d}{dt}e^{\gamma(t)} = e^{\gamma(t)}\left(\frac{\mathrm{Id} - e^{-\mathrm{ad}_{\gamma(t)}}}{\mathrm{ad}_{\gamma(t)}}(\gamma'(t))\right) = e^{\gamma(t)}\cdot s(\mathrm{ad}_{\gamma(t)})(\gamma'(t))$$

mit s wie in Lemma 9.1.

Beweis. Betrachte die Funktion $\Gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$\Gamma(t,u) = e^{-u\gamma(t)} \frac{d}{dt} e^{u\gamma(t)}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\Gamma(t,u) &= -\gamma(t)e^{-u\gamma(t)} \frac{d}{dt} e^{u\gamma(t)} + e^{-u\gamma(t)} \frac{d}{dt}\left(\gamma(t)e^{u\gamma(t)}\right) \\
&= -\gamma(t)e^{-u\gamma(t)} \frac{d}{dt} e^{u\gamma(t)} + e^{-u\gamma(t)} \cdot \left(\gamma'(t)e^{u\gamma(t)} + \gamma(t)\frac{d}{dt}e^{u\gamma(t)}\right) \\
&= e^{-u\gamma(t)}\gamma'(t)e^{u\gamma(t)} = \mathrm{Ad}_{e^{-u\gamma(t)}}(\gamma'(t)) = e^{-u\,\mathrm{ad}_{\gamma(t)}}(\gamma'(t))
\end{aligned}$$

und damit

$$e^{-\gamma(t)}\frac{d}{dt}e^{\gamma(t)} = \Gamma(t,1) = \underbrace{\Gamma(t,0)}_{=0} + \left(\int_0^1 e^{-u\,\mathrm{ad}_{\gamma(t)}}du\right)(\gamma'(t)).$$

Nun bestimmen wir das Integral. Für alle $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-u\,\mathrm{ad}_X}du &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{ad}_X)^k}{k!}u^k du = \sum_{k=0}^{\infty}(-\mathrm{ad}_X)^k \int_0^1 \frac{u^k}{k!}du \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\mathrm{ad}_X^k = s(\mathrm{ad}_X).
\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt die Behauptung. □

Beweis der BCH-Formel. Wir geben den Beweis hier erst einmal ohne diverse Abschätzungen, die an verschiedenen Stellen zeigen, dass alles wohldefiniert ist. Die entsprechenden Rechnungen finden sich im Anschluss (9.3).
Es sei $\gamma(t) = \log(e^X e^{tY})$. Man muss zeigen, dass $e^X e^{tY}$ für $t \in (-1,1)$ tatsächlich im Definitionsbereich des Logarithmus liegt (9.3). Es gelten $\gamma(0) = \log(e^X) = X$ und $\log(e^X e^Y) = \gamma(1) = \gamma(0) + \int_0^1 \gamma'(t)dt$. Wir bestimmen $\gamma'(t)$. Einerseits gilt

$$\frac{d}{dt}e^{\gamma(t)} = \frac{d}{dt}e^X e^{tY} = e^X e^{tY} Y = e^{\gamma(t)} Y.$$

Andererseits können wir auch Prop. 9.2 anwenden und erhalten

$$\frac{d}{dt}e^{\gamma(t)} = e^{\gamma(t)} \cdot s(\mathrm{ad}_{\gamma(t)})(\gamma'(t)).$$

Ein Vergleich zeigt

$$s(\mathrm{ad}_{\gamma(t)})(\gamma'(t)) = Y.$$

Nun zeigt man, dass $\|\mathrm{ad}(\gamma(t))\| < \log(2)$ gilt (9.3) und damit $r(e^{\mathrm{ad}_{\gamma(t)}})\cdot s(\mathrm{ad}_{\gamma(t)}) = \mathrm{id}_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})}$ nach Lemma 9.1. (Beachte, dass das Lemma hier auf Matrizen der Größe n^2 bzw. Endormorphismen von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ angewandt wird.) Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= r(e^{\mathrm{ad}_{\gamma(t)}})s(\mathrm{ad}_{\gamma(t)})(\gamma'(t)) = r(e^{\mathrm{ad}_{\gamma(t)}})(Y) \\
&= r(\mathrm{Ad}_{\exp(\gamma(t))})(Y) = r(\mathrm{Ad}_{\exp(X)\exp(tY)})(Y) \\
&= r(\mathrm{Ad}_{\exp(X)}\,\mathrm{Ad}_{\exp(tY)})(Y) = r(e^{\mathrm{ad}_X}e^{t\,\mathrm{ad}_Y})(Y).
\end{aligned}$$
□

Rechnung 9.3. Zu den Abschätzungen: Es sei $\varepsilon > 0$ und gelte $\|X\|, \|Y\| < \varepsilon$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|e^X e^Y\| &= \|(e^X - I)(e^Y - I) + (e^X - I) + (e^Y - I)\| \\
&\leqslant \|e^X - I\|\|e^Y - I\| + \|e^X - I\| + \|e^Y - I\| \\
&< (e^\varepsilon - 1)^2 + 2(e^\varepsilon - 1) = e^{2\varepsilon} - 1.
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon < \log(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\log(2)$ und $t \in (-1,1)$ folgt insbesondere

$$\|e^X e^{tY} - I\| < e^{\log 2} - 1 = 1.$$

Also liegt $e^X e^{tY}$ im Definitionsbereich des Logarithmus. Setze $\alpha(t) = e^X e^{tY}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\|\gamma(t)\| = \|\log(\alpha(t))\| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\alpha(t) - I\|^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(-\|\alpha(t) - I\|)^k \\ &= -\log(1 - \|\alpha(t) - I\|) < -\log(1 - (e^{2\varepsilon} - 1)) = -\log(2 - e^{2\varepsilon}).\end{aligned}$$

Für $\varepsilon = \frac{1}{2}(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}) < \frac{\log 2}{2} = \log\sqrt{2}$ führt dies auf

$$\|\gamma(t)\| < -\log(2 - e^{2\varepsilon}) = \log\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \log(\sqrt{2}).$$

Um $\|\operatorname{ad}_{\gamma(t)}\| < \log(2)$ zu zeigen, bemerke zunächst $\|XY - YX\| \leqslant 2\|X\|\|Y\|$ für alle $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ aus der Dreiecksungleichung. Daraus folgt $\|\operatorname{ad}_X\| \leqslant 2\|X\|$ für alle $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Mit der obigen Abschätzung für $\|\gamma(t)\|$ ergibt sich

$$\|\operatorname{ad}_{\gamma(t)}\| \leqslant 2\|\gamma(t)\| < 2\log(\sqrt{2}) = \log(2).$$

Damit ist alles gezeigt. □

Wenn man die Expansion des Integrals wie am Ende von Abschnitt 7 allgemein durchführt, erhält man die folgende liebliche Reihendarstellung, die wir aber nicht verwenden.

Korollar 9.4 (Reihenform der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel).
Es seien $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ *mit* $\|X\|, \|Y\| < \frac{1}{2}\log(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$. *Dann gilt*

$$\log(e^X e^Y) = X + \sum_{\substack{k,m\geqslant 0\\ p_i+q_i>0}} \frac{(-1)^k}{(k+1)(q_1 + \cdots + q_k + 1)} \frac{(\operatorname{ad}_X)^{p_1}(\operatorname{ad}_Y)^{q_1}\cdots(\operatorname{ad}_X)^{p_k}(\operatorname{ad}_Y)^{q_k}(\operatorname{ad}_X)^m}{p_1!q_1!\cdots p_k!q_k!m!}(Y).$$

Beweis. Siehe Hilgert-Neeb [5, Prop. 3.4.5]. □

9.2. ÜBERLAGERUNGEN

Im Zusammenhang mit Kor. 8.3 hatten wir im vorigen Abschnitt bereits eine Definition (8.6) der universellen Überlagerung einer Lie-Gruppe gegeben. Diese werden wir jetzt mit der allgemeineren topologischen Definition in Einklang bringen.

Definition 9.5. Es sei X ein topologischer Raum. Eine *Überlagerung* von X ist topologischer Raum C mit einer stetigen Surjektion $p\colon C \to X$ mit der folgenden Eigenschaft:
Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U von x in X derart, dass $p^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen von C ist, die alle durch p homöomorph auf U abgebildet werden. Die Überlagerung $p\colon C \to X$ heißt *universell*, wenn C einfach zusammenhängend ist.

Beispiele 9.6.

(1) Die Abbildung $p\colon \mathbb{R} \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist eine Überlagerung. Ist z.B. $x = 1 \in S^1$, so betrachte die Umgebung $U = \{x \in S^1 \mid \operatorname{Re}(x) > 0\}$. Es gilt $p^{-1}(U) = \bigcup_{a \in 2\mathbb{Z}} \big((a - \frac{1}{2})\pi, (a + \frac{1}{2})\pi\big)$, und eingeschränkt auf jedes dieser Intervalle ist p ein Homöomorphismus.

(2) Allgemeiner ist die Surjektion $p\colon \mathbb{R}^n \to T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ mit Kern $\mathbb{Z}^n$ (vgl. §2.3) die universelle Überlagerung des n-dimensionalen Torus.

Proposition 9.7. *Es sei $\Phi\colon G \to H$ ein Homomorphismus von zusammenhängenden Lie-Gruppen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) Die stetige Abbildung Φ ist eine Überlagerung.

(2) Die Abbildung Φ ist ein lokaler Isomorphismus, d.h. es gibt eine Umgebung U der Eins in G derart, dass $\Phi\colon U \to \Phi(U)$ ein Homöomorphismus ist.

(3) Der induzierte Homomorphismus $\varphi\colon g \to \mathfrak{h}$ zwischen den Lie-Algebren von G und H ist ein Isomorphismus.

(4) Φ ist surjektiv und $\ker(\Phi)$ ist eine diskrete Untergruppe von G.

Beweisskizze. (1) $\Longrightarrow$ (2) ist klar aus der Definition einer Überlagerung.
(2) $\Longrightarrow$ (3). Da Φ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen ist und lokal ein Homöomorphismus, ist Φ lokal ein Diffeomorphismus. (Dieser Punkt ist aus den uns bekannten Resultaten leider nicht ganz klar.) Damit ist die Tangentialabbildung in Eins ein Isomorphismus. Diese ist gerade der induzierte Homomorphismus von Lie-Algebren (Prop. 6.10).
(3) $\Longrightarrow$ (4). Nach Kor. 7.5 gibt es eine Umgebung U des neutralen Elements e in H, auf der Φ eine inverse (sogar multiplikative) stetige Abbildung besitzt. Insbesondere ist Φ auf U eine offene Abbildung und damit $\Phi(U)$ offen in H. Da H zusammenhängend ist, folgt daraus $\Phi(G) = H$ nach Prop. 5.8. Außerdem ist Φ auf U injektiv, also gilt $U \cap \ker(\Phi) = \{e\}$. Für jedes $x \in \ker(\Phi)$ ist dann xU eine Umgebung von x in G mit $xU \cap \ker(\Phi) = \{x\}$. Also ist $\ker(\Phi)$ eine diskrete Untergruppe.
(4) $\Longrightarrow$ (1). Es sei U eine offene Umgebung von e mit $U \cap \ker(\Phi) = \{e\}$. Dann wird U isomorph auf $V = \Phi(U)$ abgebildet. Für $y \in H$ gilt dann $\Phi^{-1}(yV) = \bigcup_{x \in \ker(\Phi)} x\Phi^{-1}(yV)$. Wegen $U \cap \ker(\Phi) = \{e\}$ ist diese Vereinigung disjunkt. Also ist Φ eine Überlagerung. □

Satz 9.8. *Es sei X eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit*[1].

(1) *Es gibt eine universelle Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to X$.* *(*Existenz*)*

(2) *Sei Z eine einfach zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit und $f\colon Z \to X$ eine stetige Abbildung. Sei $z \in Z$ und sei $y \in \widetilde{X}$ mit $p(y) = f(z)$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\widetilde{f}\colon Z \to \widetilde{X}$ mit $f = p \circ \widetilde{f}$ und $\widetilde{f}(z) = y$. (Die Abbildung $\widetilde{f}$ wird ein* Lift *von f genannt.)* *(*Liftungseigenschaft*)*

(3) *Ist $q\colon C \to X$ eine universelle Überlagerung von X, so gibt es einen Homöomorphismus $f\colon \widetilde{X} \to C$ mit $p = q \circ f$.* *(*Eindeutigkeit*)*

Beweis. Siehe z.B. Hatcher [**4**, §1.3]. □

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun zeigen, dass jede zusammenhängende Lie-Gruppe eine universelle Überlagerung als Lie-Gruppe besitzt. (Dies haben wir schon in Satz 8.5 formuliert).

Satz 9.9. *Es sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe. Dann gibt es eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe $\widetilde{G}$ zusammen mit einem Homomorphismus $\Phi\colon \widetilde{G} \to G$ derart, dass der induzierte Homomorphismus $\varphi\colon \widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ von Lie-Algebren ein Isomorphismus ist.*

Beweisskizze. Nach dem vorangehenden Satz existiert die universelle Überlagerung $p\colon \widetilde{G} \to G$ als topologischer Raum. Auf diesem Raum definieren wir die Gruppenstruktur wie folgt: Betrachte die Abbildung $\mu\colon \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to G$ definiert durch $\mu(x, y) = p(x)p(y)$. Sei $e \in G$ das neutrale Element und wähle $e_0 \in \widetilde{G}$ mit $p(e_0) = e$. Dann gibt es nach der Liftungseigenschaft eine eindeutig bestimmte Abbildung $\widetilde{\mu}\colon \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ mit $p(\mu(x, y)) = p(x)p(y)$ und $\widetilde{\mu}(e_0, e_0) = e_0$. Analog gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\widetilde{\iota}\colon \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ mit $p(\iota(x)) = p(x)^{-1}$ und $\widetilde{\iota}(e_0) = e_0$.

Behaupte, dass $\widetilde{G}$ durch die Verknüpfung $\widetilde{\mu}$ zu einer Gruppe mit neutralem Element e_0 wird, wobei $\widetilde{\iota}(x)$ das Inverse zu x ist. Wir zeigen exemplarisch, dass $\widetilde{\mu}(x, \widetilde{\iota}(x)) = e_0$ für alle $x \in \widetilde{G}$ gilt: Per Definition gilt $p(\widetilde{\mu}(x, \widetilde{\iota}(x))) = p(x) \cdot p(\widetilde{\iota}(x)) = p(x) \cdot p(x)^{-1} = e$. Also ist $\widetilde{G} \to \widetilde{G}$, $x \mapsto \widetilde{\mu}(x, \widetilde{\iota}(x))$ ein Lift der konstanten Abbildung $\widetilde{G} \to G$, $x \mapsto e$ mit $\widetilde{\mu}(e_0, \widetilde{\iota}(e_0)) = e_0$. Nach der Eindeutigkeit des Lifts (Satz 9.8(2)) muss $x \mapsto \widetilde{\mu}(x, \widetilde{\iota}(x))$ damit mit dem konstanten Lift $x \mapsto e_0$ übereinstimmen. Analog zeigt man mithilfe der Eindeutigkeit von Lifts die Assoziativität und dass e_0 ein neutrales Element ist. Aus der Definition ist außerdem klar, dass p ein Homomorphismus ist.

Dies realisiert die universelle Überlagerung als topologische Gruppe. Man muss nun noch zeigen, dass $\widetilde{G}$ eine geeignete (eindeutige) differenzierbare Struktur besitzt, die $\widetilde{G}$ zu einer Lie-Gruppe macht. Siehe dazu etwa Hilgert-Neeb [**5**, §9.4.2]. □

Bemerkungen 9.10.

(1) Ist G eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so ist G die universelle Überlagerung jeder anderen Lie-Gruppe, deren Lie-Algebra isomorph zu $\mathfrak{g}$ ist (nach Kor. 8.3).

(2) Ist $p\colon \widetilde{G} \to G$ die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden Lie-Gruppe G, so kann man beweisen, dass $\ker(p)$ gerade zur Fundamentalgruppe $\pi_1(G)$ von G isomorph ist (siehe Hilgert-Neeb [**5**, Thm. 9.5.4]). Andererseits ist $\ker(p)$ nach Prop. 9.7 eine diskrete Untergruppe von G und damit nach Übung H1.2 abelsch. Es folgt insbesondere, dass die Fundamentalgruppe einer Lie-Gruppe abelsch ist, was für allgemeine topologische Räume nicht der Fall sein muss.

[1] Allgemeiner gilt der Satz für jeden topologischen Raum, der wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semi-lokal einfach-zusammenhängend (!) ist.

Die topologische Theorie sichert damit die Existenz der universellen Überlagerung. Insbesondere erhält man zu jeder der uns schon bekannten Matrix-Lie-Gruppen eine neue Gruppe (sofern die ursprüngliche Gruppe nicht bereits einfach zusammenhängend ist). Die folgende Tabelle werden wir in der Übung teilweise noch genauer besprechen.

Gruppe	**Dimension**	**Einfach zusammenhängend?**	**Fundamentalgruppe**
$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 2$)	n^2	nein	wie $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 2$)	$n^2 - 1$	nein	wie $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$
$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$	1	nein	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 3$)	$\frac{1}{2}n(n-1)$	nein	$\mathbb{Z}/2$
$\mathrm{U}_n(\mathbb{R})$	n^2	nein	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{SU}_n(\mathbb{R})$	$n^2 - 1$	ja	$\{1\}$
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	n^2 ($\mathbb{C}$-Dim.)	nein	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$	$n^2 - 1$ ($\mathbb{C}$-Dim.)	ja	$\{1\}$
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ ($n \geqslant 2$)	$\frac{1}{2}n(n-1)$ ($\mathbb{C}$-Dim.)	nein	wie $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$

Übung 9.1. Verifiziere die angegebenen Dimensionen über die Dimension der Lie-Algebren.

Bemerkung 9.11. Wir haben gesehen, dass SU_2 und $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ isomorphe Lie-Algebren haben (Übung H4.2). Da SU_2 einfach zusammenhängend ist, zeigt dies, dass SU_2 die universelle Überlagerung von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ist. Explizit kann man die Überlagerungsabbildung wie folgt sehen: Sei $V = \{X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid \overline{X}^T = X \text{ und } \mathrm{tr}(A) = 0\}$ der dreidimensionale Raum der hermiteschen 2×2-Matrizen mit Spur 0. Die Gruppe SU_2 operiert auf V durch Konjugation, also durch $\mathrm{SU}_2 \times V \ni (A, X) \mapsto AXA^{-1} \in V$. Dadurch ist ein Homomorphismus $p\colon \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{GL}(V)$ mit $\ker(p) = \{\pm I\}$ gegeben. Die Basis

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

von V ist eine Orthonormalbasis für das Skalarprodukt $\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AB)$ auf V. Man rechnet nun nach, dass $p(\mathrm{SU}_2)$ in $\mathrm{GL}(V)$ bezüglich dieser Basis gerade $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ist (siehe etwa Hall [**3**, §1.6.1]).

Ziel der folgenden beiden Übungen ist es zu beweisen, dass die universelle Überlagerung von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ für $n \geqslant 2$ *keine* Matrix-Lie-Gruppe ist.

Übung H9.1. Es sei $G \subset \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und sei $\varphi\colon \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Zeige, dass es einen Homomorphismus $\Phi\colon \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to G$ von Lie-Gruppen mit $\Phi(e^X) = e^{\varphi(X)}$ für alle $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ gibt.
(*Hinweis:* Verwende (ohne Beweis), dass $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ einfach zusammenhängend ist.)
(*Bemerkung:* Diese Aussage ist nicht wahr, wenn G keine Matrix-Lie-Gruppe ist.)

Übung H9.2. Es sei $n \geqslant 2$, sei $p\colon \widetilde{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})} \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ die universelle Überlagerung von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und sei $\Phi\colon \widetilde{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})} \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen (für ein $N > 0$). Zeige, dass Φ nicht injektiv ist.
(*Hinweis:* Verwende (ohne Beweis), dass $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ nicht einfach zusammenhängend ist.)

10. UNTERGRUPPEN UND UNTERALGEBREN

Es sei G eine (Matrix-)Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Da H wieder eine (Matrix-)Lie-Gruppe ist, ist die Lie-Algebra von H eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. In diesem Abschnitt gehen wir der Frage nach, inwieweit auch die Umkehrung stimmt: Gegeben eine Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von G, gibt es dann eine Untergruppe von G mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$? Die Antwort ist ja oder nein, je nachdem, was man genau fordert. Betrachte zunächst das folgende Beispiel: Es sei $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ und

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{bmatrix} it & 0 \\ 0 & \alpha it \end{bmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine irrationale Zahl ist. Dies ist eine eindimensionale (damit kommutative) Unteralgebra von $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$. Betrachte $H_0 = \exp(\mathfrak{h})$, also

$$H_0 = \left\{ \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{\alpha it} \end{bmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dies ist eine Einparameter-Untergruppe von G, die jedoch nicht abgeschlossen ist (vgl. Beispiel 1.4(4)). Das Argument dort zeigt, dass der Abschluss von H_0 in G genau der Torus

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{is} \end{bmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ist. Dieser ist jedoch zweidimensional. Es gibt also keine abgeschlossene Untergruppe von G mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$, denn sonst enthielte $\mathfrak{h}$ die zweidimensionale Lie-Algebra von T.

Immerhin gehört zu $\mathfrak{h}$ sehr wohl eine Untergruppe von G, nämlich H_0. Da diese aber nicht abgeschlossen ist, macht es nach unserer bisherigen Definition keinen Sinn zu sagen, dass $\mathfrak{h}$ die Lie-Algebra von H_0 ist. Deshalb erweitern wir die Definition entsprechend:

Definition 10.1. Es sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Eine Untergruppe H von G heißt eine *analytische Untergruppe* von G, wenn folgendes gilt:

(1) Die Menge
$$\mathfrak{h} = \left\{ X \in \mathfrak{g} \mid e^{tX} \in H \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \right\}$$
ist ein linearer Unterraum von $\mathfrak{g}$, genannt die *Lie-Algebra von H*.

(2) Jedes Element $x \in H$ besitzt eine Darstellung
$$x = e^{X_1} \cdots e^{X_m}$$
mit $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{h}$.

Proposition 10.2. *Jede analytische Untergruppe einer Lie-Gruppe ist zusammenhängend.*

Beweis. Ist $H \subset G$ eine analytische Untergruppe von G und $x \in H$, so schreibe $x = e^{X_1} \cdots e^{X_m}$ mit $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}$ wie oben. Dann ist $x(t) = x e^{-tX_m}$ ein stetiger Weg in H mit $x(0) = x$ und $x(1) = e^{X_1} \cdots e^{X_{m-1}}$. Durch Induktion nach m sieht man, dass x mit der Eins durch einen stetigen Weg verbunden werden kann. □

Proposition 10.3. *Ist G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und H eine analytische Untergruppe von G, so ist der zugehörige Unterraum $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid e^{tX} \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$ eine Unteralgebra von G, d.h. es gilt $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ für alle $X, Y \in \mathfrak{h}$.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall von Matrix-Lie-Gruppen. Dort geht der Beweis genauso wie Prop. 4.6: Für alle $X, Y \in \mathfrak{h}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt $e^{-tX} Y e^{tX} \in \mathfrak{h}$ und damit $[X, Y] = \frac{d}{dt}(e^{tX} Y e^{-tX})|_{t=0} \in \mathfrak{h}$, da $\mathfrak{h}$ als linearer Unterraum in $\mathfrak{g}$ abgeschlossen ist. □

Das Hauptergebnis in diesem Abschnitt ist der folgende Satz.

Satz 10.4. *Es sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und sei $\mathfrak{h}$ eine Unteralgebra von G. Dann gibt es genau eine analytische Untergruppe von G mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar. Wir beweisen die Existenz für den Fall von Matrix-Lie-Gruppen. Wir können dann $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und damit $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ annehmen. Es sei H die Menge aller Produkte $e^{X_1} \cdots e^{X_m}$ mit $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{h}$. Offenbar ist H eine Untergruppe. Wir wollen zeigen, dass H analytisch mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ ist. Der Beweis verwendet die folgende Hilfsaussage, die sich aus der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel ergibt.

Lemma 10.5. *Wähle eine Basis von $\mathfrak{h}$ und nenne ein Element $R \in \mathfrak{h}$ rational, wenn es bezüglich der Basis rationale Koeffizienten hat. Dann gibt es für jedes $\delta > 0$ und jedes $A \in H$ rationale Elemente $R_1, \ldots, R_m \in \mathfrak{h}$ und ein $X \in \mathfrak{h}$ mit $\|X\| < \delta$ und*

$$A = e^{R_1} \cdots e^{R_m} e^X.$$

Beweis des Lemmas. Wir wählen zunächst $\varepsilon > 0$ klein genug, dass die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel für alle $X, Y \in \mathfrak{h}$ mit $\|X\|, \|Y\| < \varepsilon$ gilt. Insbesondere ist dann

$$e^X e^Y = e^{X * Y}$$

(wobei $X * Y = \log(e^X e^Y)$). Weiter wählen wir $0 < \varepsilon' \leqslant \delta$ so klein, dass $\|X * Y\| < \varepsilon$ für alle X, Y mit $\|X\|, \|Y\| < \varepsilon'$ gilt. Es sei nun $A \in H$, etwa

$$A = e^{X_1} \cdots e^{X_m}$$

mit $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{h}$. Da $\exp(X) = (\exp(X/n))^n$ gilt, können wir $\|X_i\| < \varepsilon'$ für alle $i = 1, \ldots, m$ annehmen, indem wir m ggf. vergrößern. Da $\mathfrak{h}$ eine Unteralgebra ist, und damit abgeschlossen unter ad_{X_i} und ad_{X_j}, impliziert die BCH-Formel dann $X_i * X_j \in \mathfrak{h}$.

Weiter gilt für $R_1 \in \mathfrak{h}$ mit $\|R_1\| < \varepsilon$ die Gleichheit

$$e^{X_1} e^{X_2} = e^{X_1 * X_2} = e^{R_1} e^{-R_1} e^{X_1 * X_2} = e^{R_1} e^{-R_1 * (X_1 * X_2)}.$$

Da die Abbildung $(X, Y) \mapsto X * Y$ stetig ist und $-(X_1 * X_2) * (X_1 * X_2) = -(X_1 * X_2) + (X_1 * X_2) = 0$ ist, gilt $\| - R_1 * (X_1 * X_2)\| < \varepsilon'$, wenn R_1 nah genug an $X_1 * X_2$ liegt. Wir wählen nun ein rationales R_1, dass diesen Anforderungen genügt. Es gilt dann also

$$A = e^{R_1} e^{\widetilde{X}_2} e^{X_3} \cdots e^{X_m}$$

mit $\widetilde{X}_2 = -R_1 * (X_1 * X_2)$ und $\|\widetilde{X}_2\| < \varepsilon'$. Nun fahren wir induktiv fort, bis wir

$$A = e^{R_1} \cdots e^{R_{m-1}} e^{\widetilde{X}_m}$$

mit $R_1, \ldots, R_{m-1}$ rational und $\|\widetilde{X}_m\| < \varepsilon' \leqslant \delta$ erreicht haben. □

Weiter im Beweis des Satzes: Um zu zeigen, dass H eine analytische Untergruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ ist, müssen wir nur folgendes beweisen: Jedes $Z \in \mathfrak{g}$ mit $e^{tZ} \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist in $\mathfrak{h}$ enthalten.

Wir schreiben $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$, wobei $\mathfrak{h}^\perp$ das orthogonale Komplement von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ ist. Es gibt dann Umgebungen U von 0 in $\mathfrak{h}$, V von 0 in $\mathfrak{h}^\perp$ und W von I in G derart, dass jedes $A \in W$ eine eindeutige Darstellung $A = e^X e^Y$ mit $X \in U$ und $Y \in V$ besitzt, wobei X und Y stetig von A abhängen. (Dies haben wir im Beweis von Satz 5.4 ausführlich diskutiert.)

Ist nun Z wie oben, dann können wir für hinreichend kleine t also

$$e^{tZ} = e^{X(t)} e^{Y(t)}$$

schreiben, wobei X, Y stetige Funktionen in t mit $X(t) \in U \subset \mathfrak{h}$ und $Y(t) \in V \subset \mathfrak{h}^\perp$ sind. Wir wollen zeigen, dass $Y(t)$ identisch 0 ist, denn dann folgt $tZ = X(t) \in \mathfrak{h}$ für kleine t, da das Exponential auf $U \times V$ injektiv ist, und damit $Z \in \mathfrak{h}$.

Für kleine t gilt $e^{Y(t)} = e^{-X(t)} e^{tZ} \in H$ und $Y(t) \in V$. Wir zeigen, dass das für höchstens abzählbar viele verschiedene $Y(t)$ möglich ist, woraus folgt, dass $Y(t)$ konstant sein muss. Wegen $Y(0) = 0$, ist $Y(t)$ dann konstant 0, wie behauptet.

Zeige dazu folgendes: Sei $\delta > 0$ klein genug, damit $X * Y \in U$ für alle $X, Y \in \mathfrak{h}$ mit $\|X\|, \|Y\| < \delta$ gilt. Dann gibt es für jede (fest gewählte) Folge $R_1, \ldots, R_m$ von Elementen in $\mathfrak{h}$ höchstens ein $X \in \mathfrak{h}$ mit $\|X\| < \delta$ derart, dass $e^{R_1} \cdots e^{R_m} e^X \in \exp(V)$ gilt. Denn sind $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ zwei solche Elemente, dann gilt etwa

$$e^{R_1} \cdots e^{R_m} e^{X_1} = e^{Y_1}$$

$$e^{R_1} \cdots e^{R_m} e^{X_2} = e^{Y_2}$$

für $Y_1, Y_2 \in V$ und damit

$$e^{Y_2} = e^{Y_1} e^{-X_1} e^{X_2} = e^{Y_1} e^{-X_1 * X_2}.$$

Aus der Eindeutigkeit der Darstellung folgt dann $Y_1 = Y_2$ und $-X_1 * X_2 = 0$, also $e^{X_1} = e^{X_2}$ und damit $X_1 = X_2$.

Für jedes $Y \in V$ mit $e^Y \in H$ gibt es nach dem Lemma eine Darstellung $e^Y = e^{R_1} \cdots e^{R_m} e^X$ mit $\|X\| < \delta$ und $R_1, \ldots, R_m$ rational. Da es aber nur abzählbar viele Wahlmöglichkeiten für $R_1, \ldots, R_m$ und $m \geqslant 0$ gibt und X dadurch eindeutig fest gelegt ist, ist gezeigt, dass $e^{Y(t)} \in H$ für höchstens abzählbar viele $Y(t)$ gelten kann. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung 10.6. Nach dem Satz von Ado ist jede Lie-Algebra isomorph zu einer Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ für geeignetes n (vgl. Bem. 4.9(2)). Zusammen mit Satz 10.4 folgt, dass jede Lie-Algebra als Lie-Algebra einer analytischen Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ auftritt. Diese analytische Untergruppe ist nicht unbedingt eine Matrix-Lie-Gruppe, wenn sie nicht abgeschlossen ist. Man kann sie aber mit einer Struktur als abstrakte Lie-Gruppe versehen (die im wesentlichen durch die Exponentialabbildung gegeben ist). Insgesamt zeigt dies, dass jede Lie-Algebra die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe ist.

Übung H10.1. Es seien F und G zusammenhängende Matrix-Lie-Gruppen. Sei $\Phi\colon F \to G$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen und $\varphi\colon \mathfrak{f} \to \mathfrak{g}$ der induzierte Homomorphismus von Lie-Algebren. Zeige, dass $\Phi(F)$ die analytische Untergruppe von G mit Lie-Algebra $\varphi(\mathfrak{f})$ ist.

Übung H10.2.

(1) Zeige, dass alle analytischen Untergruppen von SU_2 abgeschlossen sind.
(*Hinweis:* Um die Unteralgebren von $\mathfrak{su}_2$ zu bestimmen, benutze Aufgabe H4.2.)

(2) Finde eine analytische Untergruppe von SU_3, die nicht abgeschlossen ist.

11. GRUNDLAGEN DER DARSTELLUNGSTHEORIE

Eine Darstellung ist eine lineare Operation einer Lie-Gruppe auf einem Vektorraum. Ist die Gruppe eine Matrix-Lie-Gruppe, so operiert sie bereits per Definition auf dem unterliegenden Vektorraum. Ziel der Darstellungstheorie ist es jedoch, die Gesamtheit *aller* Darstellungen einer Gruppe möglichst vollständig zu verstehen.

Die Darstellungstheorie entspricht einem Ansatz, der vielfach in der modernen Mathematik verfolgt wird: Die abstrakten Objekte (hier die Lie-Gruppen) werden möglichst unabhängig von ihren konkreten Realisierungen (als Matrix-Lie-Gruppen) definiert und untersucht. Die Realisierungen (hier die Darstellungen) werden dann getrennt studiert.

11.1. ERSTE DEFINITIONEN

Definition 11.1.

(1) Es sei G eine reelle Lie-Gruppe. Eine *reelle bzw. komplexe Darstellung* von G ist ein Homomorphismus von Lie-Gruppen

$$\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V),$$

wobei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-bzw. $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim(V) \geqslant 1$ ist.

(2) Es sei $\mathfrak{g}$ eine reelle bzw. komplexe Lie-Algebra. Eine *Darstellung* von $\mathfrak{g}$ ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren

$$\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$$

wobei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim(V) \geqslant 1$ ist.

Eine Darstellung $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Lie-Gruppe G ist also gerade eine (glatte) *Operation* von G auf dem Vektorraum V durch lineare Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (x, v) & \mapsto & \Pi(x)v. \end{array}$$

Dabei ist $\Pi(x)v$ die Anwendung der linearen Abbildung $\Pi(x)$ auf den Vektor v. Analog operiert bei einer Darstellung $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ von Lie-Algebren auch die Lie-Algebra auf V durch $(X, v) \mapsto \pi(X)v$ für $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$, mit dem Unterschied, dass die lineare Abbildung $\pi(X)$ nicht unbedingt invertierbar sein muss.

Beispiele 11.2.

(1) Die Gruppe $G = (\mathbb{R}, +)$ operiert auf $\mathbb{R}^2$ durch Scherungen, d.h. die Abbildung $\Pi\colon a \mapsto \left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ ist eine Darstellung von G. Sie operiert aber auch durch Drehungen unter der Darstellung $\Sigma\colon a \mapsto \left[\begin{smallmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{smallmatrix}\right]$. Dies sind zwei verschiedene Darstellungen derselben Gruppe. Auf $\mathbb{R}^2$ operieren dabei tatsächlich zwei verschiedene Gruppen, da $\Pi(G) \cong G$, während $\Sigma(G) = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ ist.

(2) Ist $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eine Matrix-Lie-Gruppe, so ist die Inklusion $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ selbst eine reelle bzw. komplexe Darstellung, genannt die *Standarddarstellung* von G.

(3) Es sei G eine Lie-Gruppe und sei $V = \mathbb{C}$. Dann ist die Abbildung $G \to \mathrm{GL}(V)$, $x \mapsto \mathrm{id}_V$ eine komplexe Darstellung von G, genannt die *triviale Darstellung*.

(4) Ist $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, so ist

$$\mathrm{Ad}\colon \begin{cases} G & \to & \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \\ A & \mapsto & \mathrm{Ad}_A\colon (X \mapsto AXA^{-1}) \end{cases}$$

eine Darstellung von G, genannt die *adjungierte Darstellung*.

(5) Entsprechend besitzt jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ die adjungierte Darstellung

$$\mathrm{ad}\colon \begin{cases} \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X & \mapsto & \mathrm{ad}_X\colon (Y \mapsto [X, Y]) \end{cases}$$

(6) Es sei G eine Lie-Gruppe und seien $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ und $\Sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ zwei Darstellungen von G (über demselben Körper). Dann ist die *direkte Summe*

$$\Pi \oplus \Sigma\colon G \to \mathrm{GL}(V \oplus W)$$

wieder eine Darstellung von G. Die Operation ist dabei für $(v, w) \in V \oplus W$ und $x \in G$ durch $(\Pi \oplus \Sigma)(x)(v, w) = (\Pi(x)v, \Pi(x)w)$ gegeben. Entsprechend gibt es eine direkte Summe von Darstellungen von Lie-Algebren.

Definition 11.3. Es sei G eine Lie-Gruppe und seien $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ und $\Sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ zwei Darstellungen von G. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ heißt *äquivariant*, wenn

$$\varphi(\Pi(x)v) = \Sigma(x)(\varphi(v))$$

für alle $x \in G$ und alle $v \in V$ erfüllt ist. (Mit anderen Worten, es gilt $\varphi \circ \Pi(x) = \Sigma(x) \circ \varphi$ für alle $x \in G$). Ein äquivarianter Isomorphismus heißt eine *Äquivalenz* von Darstellungen. Analog sind Äquivarianz und Äquivalenz für Darstellungen von Lie-Algebren definiert.

Beispiel 11.4. Betrachte die Standarddarstellung von $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^2$ (Operation durch Drehungen um den Nullpunkt). Jede Streckung $(x, y) \mapsto \alpha(x, y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist äquivariant. (Es ist egal, ob man zuerst streckt und dann dreht oder umgekehrt.) Dagegen ist die Spiegelung $(x, y) \mapsto (x, -y)$ nicht äquivariant.

Bemerkung 11.5. Es sei $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung einer Lie-Gruppe G und sei $\varphi\colon V \to V$ eine bijektive lineare Abbildung. Per Definition ist φ genau dann äquivariant, wenn $\varphi^{-1} \circ \Pi(x) \circ \varphi = \Pi(x)$ für alle $x \in G$ gilt. Wenn φ nicht äquivariant ist, dann kann man durch $\Sigma = \varphi^{-1} \circ \Pi(x) \circ \varphi$ eine neue Darstellung von G definieren und φ ist dann eine äquivariante Abbildung zwischen den Darstellungen Π und Σ.

Der Zusammenhang zwischen Darstellungen von Lie-Gruppen und Darstellungen von Lie-Algebren wird durch Satz 4.11 (im Fall von abstrakten Lie-Gruppen durch Prop. 6.10) gegeben, den wir hier für diesen Fall wiederholen.

Satz 11.6. *Es sei G eine reelle Lie-Gruppe mit Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *und sei* $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ *eine endlich-dimensionale Darstellung von G. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Darstellung* $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *von* $\mathfrak{g}$ *mit*

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)}$$

gegeben durch $\pi(X) = \frac{d}{dt}\Pi(e^{tX})\big|_{t=0}$, *für alle* $X \in \mathfrak{g}$. □

Übung 11.1. Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Seien $\Pi_i\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ zwei Darstellungen von G und π_i die zugehörigen Darstellungen von $\mathfrak{g}$ ($i = 1, 2$). Zeige, dass Π_1 und Π_2 genau dann äquivalent sind, wenn π_1 und π_2 äquivalent sind.

11.2. IRREDUZIBILITÄT

Definition 11.7. Es sei $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung einer Lie-Gruppe G. Ein linearer Unterraum W von V heißt *invariant*, wenn $\Pi(x)w \in W$ für alle $x \in G$ und $w \in W$ gilt. In diesem Fall erhält man durch Einschränkung von Π auf W wieder eine Darstellung, die wir mit Π_W bezeichnen. (Es ist also $\Pi_W\colon G \to \mathrm{GL}(W)$, $x \mapsto \Pi(x)|_W$.)

Der Unterraum W heißt nicht-trivial, wenn $W \neq \{0\}$ und $W \neq V$. Die Darstellung Π heißt *irreduzibel*, wenn sie keinen nicht-trivialen invarianten Unterraum besitzt. Analog sind invariante Unterräume und irreduzible Darstellungen für Lie-Algebren definiert.

Beispiel 11.8. Die zyklische Gruppe $G = \{1, x\}$ mit zwei Elementen hat die Darstellung $G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ gegeben durch $x \mapsto \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$. Sie operiert also durch die Spiegelung $(a, b) \mapsto (a, -b)$ an der Achse $W = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Diese Darstellung ist nicht irreduzibel, da W offenbar ein invarianter Unterraum ist. Beachte, dass auch $W' = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ ein invarianter Unterraum ist, obwohl W' nicht punktweise festgelassen wird.

Übung 11.2. Zeige, dass Kern und Bild einer äquivarianten Abbildung zwischen Darstellungen invariante Unterräume sind.

Übung 11.3. Es sei G eine zusammenhängende Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra g und sei $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G mit zugehöriger Darstellung π von g.
Zeige: Genau dann ist ein Unterraum W von V invariant unter Π, wenn er invariant unter π ist. Insbesondere ist Π genau dann irreduzibel, wenn π irreduzibel ist.

Satz 11.9 (Lemma von Schur). *Es sei G eine Lie-Gruppe und seien $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ und $\Sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ zwei irreduzible komplexe Darstellungen von G.*
(1) Ist $\varphi\colon V \to W$ eine äquivariante Abbildung, so gilt $\varphi = 0$ oder φ ist ein Isomorphismus.
(2) Ist $\varphi\colon V \to V$ äquivariant, so gilt $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.
(3) Sind $\varphi_1, \varphi_2\colon V \to W$ beide äquivariant, so gilt $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis. (1) Nach Aufgabe 11.2 ist der Kern von φ ein invarianter Unterraum. Da V irreduzibel ist, ist also $\varphi = 0$ oder φ ist injektiv. Ebenso ist das Bild von φ invariant und deshalb gleich $\{0\}$ oder W. Ist $\varphi \neq 0$, so ist φ damit injektiv und surjektiv, also ein Isomorphismus.

(2) Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, besitzt φ einen Eigenwert λ. Sei $U \neq \{0\}$ der Eigenraum zu λ. Dann ist U invariant, denn für alle $x \in G$ und $u \in U$ gilt

$$\varphi(\Pi(x)u) = \Pi(x)\varphi(u) = \lambda\Pi(x)u,$$

also gilt $\Pi(x)u \in U$. Da V irreduzibel ist, folgt $U = V$ und damit die Behauptung.

(3) Falls $\varphi_2 = 0$, so gilt die Behauptung mit $\lambda = 0$. Andernfalls ist φ_2 nach (1) ein Isomorphismus und nach (2) gibt es $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = \lambda\,\mathrm{id}_W$, also $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$. □

Korollar 11.10. *Es sei $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine irreduzible komplexe Darstellung einer Lie-Gruppe G. Ist x ein Element im Zentrum von G, so gibt es $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\pi(x) = \lambda\,\mathrm{id}_V$.*

Beweis. Dass x im Zentrum von G liegt bedeutet genau, dass $\pi(x)\colon V \to V$ äquivariant ist. Die Aussage folgt damit aus (2) im Lemma von Schur. □

Korollar 11.11. *Jede irreduzible komplexe Darstellung einer kommutativen Lie-Gruppe ist eindimensional.*

Beweis. Sei $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine komplexe Darstellung. Wenn G kommutativ ist, dann liegt jedes Element von G im Zentrum. Nach dem vorangehenden Korollar operiert also jedes Element von G durch Streckung mit einem Faktor auf V. Insbesondere ist jeder Unterraum von V invariant. Ist die Darstellung irreduzibel, so muss V eindimensional sein. □

Bemerkungen 11.12.

(1) Das Lemma von Schur und die beiden Korollare gelten genauso für Darstellungen von Lie-Algebren, mit (im Prinzip) denselben Beweisen. Auch die Glattheit wurde nirgends benutzt, so dass die Aussagen für alle Darstellungen von Gruppen gelten.

(2) Teil (1) im Lemma von Schur gilt offenbar auch für reelle Darstellungen. Die übrigen Aussagen gelten dagegen nur im komplexen Fall. Zum Beispiel ist die Standarddarstellung von $SO_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^2$ durch Drehungen um den Ursprung irreduzibel, so dass Kor. 11.11 über $\mathbb{R}$ nicht gelten kann. (Das liegt gerade daran, dass Drehmatrizen im allgemeinen keine reellen Eigenwerte besitzen.)

11.3. IRREDUZIBLE DARSTELLUNGEN VON $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

In diesem Abschnitt bestimmen wir alle irreduziblen Darstellungen der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Es zeigt sich, dass das ohne jede Theorie recht mühsam ist, selbst für eine so einfache Lie-Algebra. Andererseits sieht man sehr gut, dass der Übergang von der Gruppe zur Lie-Algebra die Sache deutlich vereinfacht. Es sei

$$V_m = \left\{ f \in \mathbb{C}[z_1, z_2] \mid f \text{ homogen vom Grad } m \right\}.$$

Der $\mathbb{C}$-Vektorraum V_m hat die Dimension $m+1$, denn seine Elemente sind die Polynome

$$f(z_1, z_2) = a_m z_1^m + a_{m-1} z_1^{m-1} z_2 + a_{m-2} z_1^{m-2} z_2^2 + \cdots + a_0 z_2^m \quad \text{mit } a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{C}.$$

Durch die Standarddarstellung operiert $SL_2(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^2$. Betrachte die Darstellung $\Pi_m \colon SL_2(\mathbb{C}) \to GL(V_m)$ definiert durch

$$\Pi_m(A) f = f(A^{-1} z)$$

für $A \in SL_2(\mathbb{C})$ und $f \in V_m$, wobei $z = \left[\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right]$. Wir können das ganz explizit ausrechnen: Ist $A = \left[\begin{smallmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{smallmatrix}\right] \in SL_2(\mathbb{C})$, so gilt $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{smallmatrix}\right]$ und damit

$$\Pi_m(A) f = \sum_{k=0}^{m} a_k (A_{22} z_1 - A_{12} z_2)^{m-k} (A_{11} z_2 - A_{21} z_1)^k.$$

Dass wir mit A^{-1} statt mit A operieren, ist wichtig, damit Π ein Homomorphismus wird: Für $A_1, A_2 \in SL_2(\mathbb{C})$ und $f \in V_m$ gilt $\Pi_m(A_1)\big(\Pi_m(A_2) f\big) = (\Pi_m(A_2) f)(A_1^{-1} z) = f(A_2^{-1} A_1^{-1} z) = f((A_1 A_2)^{-1} z) = \Pi_m(A_1 A_2) f$.

Wir berechnen die zugehörige Darstellung π_m von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Für $X = \left[\begin{smallmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & -X_{11} \end{smallmatrix}\right] \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ gilt $\pi_m(X) = \frac{d}{dt} \Pi_m(e^{tX})\big|_{t=0}$ und damit

$$\pi_m(X) f = \frac{d}{dt} f(e^{-tX} z) \bigg|_{t=0}.$$

Schreibe $\gamma(t) = e^{-tX} z$. Dann gilt $\gamma'(0) = -Xz$ und damit

$$\pi_m(X) f = (\nabla f)(z) \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1'(0) \\ \gamma_2'(0) \end{bmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot (X_{11} z_1 + X_{12} z_2) - \frac{\partial f}{\partial z_2} \cdot (X_{21} z_1 - X_{11} z_2). \tag{11.13}$$

Wir fixieren die Basis

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

von $\mathsf{sl}_2(\mathbb{C})$. Diese erfüllt die Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned}[H, X] &= 2X \\ [H, Y] &= -2Y \\ [X, Y] &= H.\end{aligned}$$

Wir berechnen explizit die Wirkung dieser Basiselemente auf die Basis $z_1^m, z_1^{m-1}z_2, \ldots, z_2^m$ von V_m unter π_m. Aus (11.13) erhalten wir für $0 \leqslant k \leqslant m$

$$\begin{aligned}\pi_m(H)(z_1^k z_2^{m-k}) &= (m-2k) z_1^k z_2^{m-k} \\ \pi_m(X)(z_1^k z_2^{m-k}) &= -k z_1^{k-1} z_2^{m-k+1} \\ \pi_m(Y)(z_1^k z_2^{m-k}) &= (k-m) z_1^{k+1} z_2^{m-k-1}.\end{aligned} \tag{11.14}$$

Proposition 11.15. *Die Darstellungen $\pi_m \colon \mathsf{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathsf{gl}(V_m)$ sind irreduzibel.*

Beweis. Sei $W \neq \{0\}$ ein π_m-invarianter Unterraum von V_m. Sei

$$w = a_m z_1^m + a_{m-1} z_1^{m-1} z_2 + a_{m-2} z_1^{m-2} z_2^2 + \cdots + a_0 z_2^m$$

ein Element $\neq 0$ in W und sei k_0 der größte Index k mit $a_k \neq 0$. Betrachte die Wirkung von $\pi_m(X)^{k_0}$ auf w. Nach der Berechnung von $\pi_m(X)$ in (11.14) gilt

$$\pi_m(X)^{k_0}(z_1^{k_0} z_2^{m-k_0}) = (-1)^{k_0} k_0! z_2^m.$$

Andererseits sieht man, dass $\pi_m(X)^{k_0}$ alle anderen Summanden in w auf 0 abbildet, nach Wahl von k_0. Damit gilt $\pi_m(X)^{k_0} w = b z_2^m$ mit $b = (-1)^{k_0} k_0! a_{k_0} \neq 0$. Es folgt $z_2^m \in W$. Nun ist aber $\pi_m(Y)^k z_2^m = c z_1^k z_2^{m-k}$ mit $c \neq 0$, wiederum nach (11.14). Also enthält W alle Elemente der Basis $z_1^k z_2^{m-k}$ für $0 \leqslant k \leqslant m$ und ist damit gleich V. □

Satz 11.16. *Jede irreduzible Darstellung von $\mathsf{sl}_2(\mathbb{C})$ ist äquivalent zu einer der Darstellungen π_m für ein $m \geqslant 0$. Insbesondere besitzt $\mathsf{sl}_2(\mathbb{C})$ für jedes $m \geqslant 0$ genau eine irreduzible Darstellung der Dimension $m+1$.*

Beweis. Es sei $\pi \colon \mathsf{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathsf{gl}(V)$ eine irreduzible Darstellung. Wir zeigen die Behauptung in mehreren Schritten:

(1) *Sei u ein Eigenvektor von $\pi(H)$ zum Eigenwert $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gelten*

$$\begin{aligned}\pi(H)\pi(X)u &= (\alpha+2)\pi(X)u \\ \pi(H)\pi(Y)u &= (\alpha-2)\pi(Y)u.\end{aligned}$$

Denn es gilt $[\pi(H), \pi(X)] = \pi[H, X] = 2\pi(X)$, also $\pi(H)\pi(X) = \pi(X)\pi(H) + 2\pi(X)$ und damit $\pi(H)\pi(X)u = \pi(X)(\alpha u) + 2\pi(X)u = (\alpha+2)\pi(X)u$ und analog für $\pi(H)\pi(Y)u$.

(2) *Es gibt ein $N \geqslant 0$ mit $\pi(X)^N u \neq 0$ und $\pi(X)^{N+1} u = 0$.*

Denn aus (1) sehen wir das $\pi(X)u$ entweder 0 ist oder ein Eigenvektor von $\pi(H)$ zum Eigenwert $\alpha+2$. Damit folgt $\pi(H)\pi(X)^n u = (\alpha+2n)\pi(X)^n u$ für alle $n \geqslant 1$. Da $\pi(H)$ nur endlich-viele Eigenwerte besitzt, kann $(\alpha+2n)$ nicht für alle $n \geqslant 1$ ein Eigenwert von $\pi(H)$ sein. Deshalb muss $\pi(X)^n u = 0$ für ein $n > 0$ gelten. Es sei $N+1$ das kleinste solche n.

(3) *Es gibt eine Basis $u_0, \dots, u_m$ von V mit*

$$
\begin{aligned}
\pi(H)u_k &= (m-2k)u_k \\
\pi(Y)u_k &= u_{k+1} \quad (\text{für } k < m) \\
\pi(X)u_k &= (km - k(k-1))u_{k-1} \quad (\text{für } k > 0) \\
\pi(X)u_0 &= 0 \\
\pi(Y)u_m &= 0
\end{aligned} \tag{11.17}
$$

Denn sei $u_0 = \pi(X)^N u$ und $u_k = \pi(Y)^k u_0$ für $k > 0$ und setze $m = \alpha + 2N$, mit N wie in (2). Zunächst ist noch nicht klar, dass m eine natürliche Zahl ist. Wir betrachten einfach die unendliche Folge $u_0, u_1, u_2, \dots$ und zeigen, dass die ersten drei Zeilen von (11.17) für alle $k > 0$ gelten. Die erste Zeile folgt direkt aus (1) und die zweite per Definition von u_k. Ferner gilt die vierte Zeile nach Wahl von N. Wir zeigen die dritte Zeile durch Induktion nach k. Sei $k = 1$. Wegen $[\pi(X), \pi(Y)] = \pi(H)$ gilt

$$\pi(X)u_1 = \pi(X)\pi(Y)u_0 = (\pi(Y)\pi(X) + \pi(H))u_0 = \pi(H)u_0 = mu_0.$$

Sei nun $k \geqslant 2$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
\pi(X)u_k &= \pi(X)\pi(Y)u_{k-1} \\
&= (\pi(Y)\pi(X) + \pi(H))u_{k-1} \\
&= \pi(Y)\big((k-1)m - (k-1)(k-2)\big)u_{k-2} + (m - 2(k-1))u_{k-1} \\
&= \big((k-1)m - (k-1)(k-2) + (m - 2(k-1))\big)u_{k-1} \\
&= (km - k(k-1))u_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Es bleibt die fünfte Zeile. Da die u_k allesamt Eigenvektoren von $\pi(H)$ zu verschiedenen Eigenwerten sind, muss es ein $k > 1$ mit $u_k \neq 0$ und $u_{k+1} = 0$ geben. Nach (1) gilt dann

$$0 = \pi(X)u_{k+1} = \big((k+1)m - k(k+1)\big)u_k = (k+1)(m-k)u_k.$$

Wegen $u_k \neq 0$ passiert das genau für $k = m$. Insbesondere folgt, dass m (und damit auch der Eigenwert $\alpha = m - 2N$) eine natürliche Zahl sein musss.

Da die Vektoren $u_0, \dots, u_m$ Eigenvektoren von $\pi(H)$ zu verschiedenen Eigenwerten sind, sind sie linear unabhängig. Andererseits zeigt (11.17), dass der von $u_0, \dots, u_m$ erzeugte Unterraum invariant unter $\pi(H)$, $\pi(X)$ und $\pi(Y)$ ist und damit unter ganz $\pi(\mathsf{sl}_2(\mathbb{C}))$. Da π irreduzibel ist, spannen $u_0, \dots, u_m$ ganz V auf und bilden somit eine Basis.

(4) *Es gibt eine Basis von V_m derart, dass π_m bezüglich dieser Basis gerade den Relationen* (11.17) *genügt.* Definiere diese Basis durch

$$u_k = (\pi_m(Y))^k(z_2^m) = (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} z_1^k z_2^{m-k} \quad \text{für } k = 0, \dots, m.$$

Die Relationen prüft man nun direkt aus (11.14) nach. Dann ist alles bewiesen. □

Übung H11.1. Zeige, dass die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra $\mathsf{so}_3(\mathbb{K})$ zu ihrer Standarddarstellung äquivalent ist.

Übung H11.2. Es sei G eine Lie-Gruppe und seien $\Pi_j \colon G \to \mathrm{GL}(V_j)$ für $j = 1, 2$ zwei inäquivalente irreduzible komplexe Darstellungen von G. Sei $\Pi_1 \oplus \Pi_2 \colon G \to \mathrm{GL}(V_1 \oplus V_2)$ ihre direkte Summe. Zeige, dass $V_1 \oplus \{0\}$ und $\{0\} \oplus V_2$ die einzigen nicht-trivialen invarianten Unterräume von $V_1 \oplus V_2$ sind. (*Hinweis:* Betrachte einen irreduziblen invarianten Unterraum von $V_1 \oplus V_2$ und die Projektionen $P_i \colon V_1 \oplus V_2 \to V_i$.)

12. GRUNDLAGEN DER DARSTELLUNGSTHEORIE II

12.1. VOLLSTÄNDIGE REDUZIBILITÄT

Definition 12.1. Ein *unitärer Raum* (oder komplexer Prähilbertraum) ist ein Paar $(V, \langle -,- \rangle)$ bestehend aus einem Vektorraum V über $\mathbb{C}$ und einem unitären Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ auf V (also einer positiv definiten hermiteschen Form). Eine Abbildung $\varphi\colon V \to V$ heißt *unitär*, wenn $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ für alle $u, v \in V$ gilt. Die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ enthält dann die Untergruppe $U(V)$ aller unitären Elemente von $\mathrm{GL}(V)$. Eine Darstellung $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Lie-Gruppe G (V endlich-dimensional) heißt *unitär*, wenn $\Pi(G) \subset U(V)$ gilt.

Übung 12.1. Erinnerung an die lineare Algebra: Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Raum. Wählt man eine Orthonormalbasis von V und identifiziert $\mathrm{GL}(V)$ durch diese Basis mit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so ist $U(V) = U_n$.

Definition 12.2. Eine Darstellung einer Lie-Gruppe oder Lie-Algebra heißt *vollständig reduzibel*, wenn sie zu einer direkten Summe von irreduziblen Darstellungen äquivalent ist.

Proposition 12.3. *Jede unitäre Darstellung einer Lie-Gruppe ist vollständig reduzibel.*

Beweis. Es sei $\Pi\colon G \to U(V)$ eine unitäre Darstellung. Sei $W \subset V$ ein invarianter Unterraum und sei $W^\perp$ das orthogonale Komplement von W in V. Dann ist auch $W^\perp$ ein invarianter Unterraum. Denn sind $x \in G$, $w \in W$ und $v \in W^\perp$, so gilt $\langle v, w \rangle = 0$ und damit auch $\langle \Pi(x)v, w \rangle = \langle v, \Pi(x^{-1})w \rangle = 0$ wegen $\Pi(x^{-1})w \in W$.

Ist nun V nicht irreduzibel, so gibt es einen nicht-trivialen invarianten Unterraum W. Dann ist $V \cong W \oplus W^\perp$ und $\Pi \cong \Pi_W \oplus \Pi_{W^\perp}$. Wegen $\dim(W), \dim(W^\perp) < \dim(V) < \infty$ folgt durch Induktion nach der Dimension, dass Π_W und $\Pi_{W^\perp}$ und damit auch Π zu direkten Summen von irreduziblen Darstellungen äquivalent sind. $\square$

Satz 12.4 (Maschke). *Jede Darstellung einer endlichen Gruppe ist vollständig reduzibel.*[1]

Beweis. Es sei $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine komplexe Darstellung. Wir zeigen, dass Π für ein geeignetes Skalarprodukt auf V zu einer unitären Darstellung wird. Wähle dazu ein beliebiges Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ auf V und definiere ein neues Skalarprodukt $\langle -,- \rangle_G$ durch

$$\langle v_1, v_2 \rangle_G = \sum_{x \in G} \langle \Pi(x)v_1, \Pi(x)v_2 \rangle$$

für $v_1, v_2 \in V$. (Man überzeugt sich, dass $\langle -,- \rangle$ tatsächlich wieder ein Skalarprodukt ist). Das Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ ist G-invariant, was bedeutet, dass

$$\begin{aligned}
\langle \Pi(y)v_1, \Pi(y)v_2 \rangle_G &= \sum_{x \in G} \langle \Pi(x)\Pi(y)v_1, \Pi(x)\Pi(y)v_2 \rangle \\
&= \sum_{g \in G} \langle \Pi(xy)v_1, \Pi(xy)v_2 \rangle \\
&= \sum_{g \in G} \langle \Pi(x)v_1, \Pi(x)v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle_G
\end{aligned}$$

[1]Beachte, dass wir nur über den Körpern $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ arbeiten. Allgemein gilt die Aussage über Körpern der Charakteristik Null. In Primzahlcharakteristik stimmt sie dagegen nur, wenn die Charakteristik die Gruppenordnung nicht teilt (Stichwort: Modulare Darstellungen).

für alle $y \in G$ gilt. (Die Gleichheit der zweiten mit der dritten Zeile gilt wegen $\{xy \mid x \in G\} = G$). Aber dies sagt gerade, dass $\Pi(G) \subset U(V)$ bezüglich $\langle -, - \rangle_G$ gilt. Die Behauptung folgt damit aus Prop. 12.3.

Ist $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine reelle Darstellung, so kann man das analoge Argument für ein eukldisches Skalarprodukt durchführen. (Korrekterweise sagt man dann statt unitär überall orthogonal.) □

Will man diesen Beweis für Lie-Gruppen nachmachen, dann merkt man sofort wo der Hund begraben liegt: Wenn die Gruppe nicht endlich ist, kann man das invariante Skalarprodukt nicht einfach durch eine Summe über alle Elemente definieren. Es liegt nahe, die Summe durch ein geeignetes Integral zu ersetzen.

Definition 12.5. Es sei G eine Lie-Gruppe. Ein *linksinvariantes Haar-Maß auf G* ist ein Maß $\mu \neq 0$ auf der Borelschen σ-Algebra von G mit den folgenden beiden Eigenschaften[2]:

(1) Jeder Punkt $x \in G$ besitzt eine offene Umgebung U mit $\mu(U) < \infty$.
(2) Für jede Borel-Menge $B \subset G$ und jedes $x \in G$ gilt $\mu(xB) = \mu(B)$ (wobei $xB = \{xb \mid b \in B\}$).

Das Maß μ heißt *endlich*, wenn $\mu(G) < \infty$ gilt.

Satz 12.6. *Auf jeder Lie-Gruppe existiert ein linksinvariantes Haar-Maß. Dieses ist (bis auf Skalierung mit einem Faktor) eindeutig bestimmt. Das linksinvariante Haar-Maß einer Lie-Gruppe G ist genau dann endlich, wenn G kompakt ist.*

Beweis. Siehe z.B. Hall [**3**, §C.4]. □

Damit erhalten wir das Analogon des Satzes von Maschke für kompakte Lie-Gruppen.

Satz 12.7. *Jede Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe ist vollständig reduzibel.*

Beweisskizze. Sei G eine kompakte Lie-Gruppe und $\Pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung. Wie im Beweis von Satz 12.4 definieren wir ein invariantes Skalarprodukt $\langle -, - \rangle_G$ auf V durch

$$\langle v_1, v_2 \rangle_G = \int_{x \in G} \langle \Pi(x) v_1, \Pi(x) v_2 \rangle d\mu$$

für $v_1, v_2 \in V$, wobei μ ein links-invariantes Haar-Maß auf G ist. Nun gilt wieder $\Pi(G) \subset U(V)$ bezüglich $\langle -, - \rangle_G$ und die Behauptung folgt aus Prop. 12.3. □

Übung 12.2. Sei $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine vollständig reduzible Darstellung einer Lie-Gruppe G. Zeige:

(1) Jeder invariante Unterraum von V ist vollständig reduzibel.
(2) Zu jedem invarianten Unterraum W von V existiert ein invariantes Komplement, d.h. ein invarianter Unterraum W' von V mit $V = W \oplus W'$.

[2]Ein Satz zur Maßtheorie, soweit sie nicht bekannt ist: Ein Maß auf der Borelschen σ-Algebra von G ist im wesentlichen eine Abbildung, die jeder offenen (oder abgeschlossenen) Teilmenge von G in sinnvoller Weise ein abstraktes Volumen zuordnet, das eine nicht-negative reelle Zahl oder ∞ sein kann.

12.2. KOMPLEXIFIZIERUNG

Es sei V ein reeller Vektorraum. Die *Komplexifizierung* $V_{\mathbb{C}}$ von V ist der Vektorraum aller formalen Summen[3] $v+iw$ mit $v, w \in V$ mit der offenkundigen Struktur als $\mathbb{C}$-Vektorraum gegeben durch $(a+ib)\cdot(v+iw) = av-bw+i(aw+bv)$. Fasst man $V_{\mathbb{C}}$ als reellen Vektorraum auf, so ist V ein Untervektorraum von $V_{\mathbb{C}}$.

Übung 12.3. Ist V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, so gilt $\dim_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{C}}) = 2\dim_{\mathbb{R}}(V)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$.

Übung 12.4. Es sei V ein reeller Vektorraum und sei $\iota\colon V \to V$ linear mit $\iota^2 = -\mathrm{id}_V$. Zeige, dass V durch die Definition $(a+ib)\cdot v = av + b\iota(v)$ für $v \in V$ und $a+ib \in \mathbb{C}$ zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum wird. (Beachte: Ist $\dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$, so folgt insbesondere, dass $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ gerade sein muss.) Wie hängt diese Konstruktion mit der Komplexifizierung $V_{\mathbb{C}}$ von V zusammen?

Es sei $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie-Algebra. Auf dem Vektorraum $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ definiert man eine Lie-Algebra-Struktur durch

$$[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] = \big([X_1, Y_1] - [X_2, Y_2]\big) + i\big([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1]\big).$$

Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ mit dieser Lie-Klammer heißt die *Komplexifizierung von* $\mathfrak{g}$.

Übung 12.5. Zeige, dass $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tatsächlich eine komplexe Lie-Algebra ist. Zeige, dass die obige Definition der Lie-Klammer die einzig mögliche ist, die auf der reellen Unteralgebra $\mathfrak{g}$ mit der ursprünglichen übereinstimmt.

Da jede komplexe Matrix X eine eindeutige Darstellung $X = X_1 + iX_2$ mit reellen X_1, X_2 besitzt, ist klar, dass $(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}))_{\mathbb{C}}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum zu $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ isomorph ist. Dies ist tatsächlich ein Isomorphismus von komplexen Lie-Algebren. Es gilt also $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Übung 12.6. Für alle $n \geqslant 1$ gilt $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$.

Proposition 12.8. *Für alle $n \geqslant 1$ gelten $(\mathfrak{u}_n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ und $(\mathfrak{su}_n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.*

Beweis. Es gilt $\mathfrak{u}_n = \{Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \overline{Y}^T = -Y\}$ (siehe §4.1). Ist $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, so schreibe

$$X = \frac{X - \overline{X}^T}{2} + i\frac{X + \overline{X}^T}{2i}.$$

Dann sind $(X - \overline{X}^T)/2$ und $(X + \overline{X}^T)/(2i)$ beide Elemente von $\mathfrak{u}_n$. Mit anderen Worten, jedes $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ besitzt eine Darstellung $X = X_1 + iX_2$ mit $X_1, X_2 \in \mathfrak{u}_n$, und man überzeugt sich, dass diese Darstellung eindeutig ist. Daraus folgt, dass $(\mathfrak{u}_n)_{\mathbb{C}}$ als Lie-Algebra zu $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ isomorph ist. Falls X die Spur 0 hat, so auch X_1 und X_2, was $(\mathfrak{su}_n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ zeigt. □

Die reellen Lie-Algebren $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ und $\mathfrak{su}_n$ werden also nach Komplexifizierung isomorph, obwohl sie über $\mathbb{R}$ nicht isomorph sind (siehe Übung H4.2). Man sagt auch, die komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ besitzt zwei verschiedene reelle *Formen*.

Proposition 12.9. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie-Algebra und $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ihre Komplexifizierung. Dann setzt jede komplexe Darstellung $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ von $\mathfrak{g}$ zu einer eindeutig besimmten Darstellung $\pi_{\mathbb{C}}\colon \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{gl}(V)$ fort, die durch*

$$\pi_{\mathbb{C}}(X_1 + iX_2) = \pi(X_1) + i\pi(X_2)$$

[3] Mathematisch korrekter geht das so: $V_{\mathbb{C}}$ ist die direkte Summe $V \oplus V$ versehen mit der $\mathbb{C}$-Vektorraum-Struktur $(a+ib)\cdot(v,w) = (av-bw, aw+bv)$. Nun *definiert* man die Notation $v + iw := (v, w)$. Diese Konstruktion ist völlig analog zur Definition der komplexen Zahlen selbst über Paare von reellen Zahlen.

für alle $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ gegeben ist. Ein Unterraum W von V ist genau dann $\pi(\mathfrak{g})$-invariant, wenn er $\pi_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-invariant ist. Insbesondere ist π genau dann irreduzibel, wenn $\pi_{\mathbb{C}}$ irreduzibel ist.

Beweis. Dass $\pi_{\mathbb{C}}$ die eindeutige $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung ist, kann man direkt nachrechnen. Außerdem ist $\pi_{\mathbb{C}}$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathbb{C}}([X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2]) &= \pi_{\mathbb{C}}\big([X_1, Y_1] - [X_2, Y_2] + i([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1])\big) \\
&= \pi\big([X_1, Y_1] - [X_2, Y_2]\big) + i\pi\big([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1]\big) \\
&= [\pi X_1, \pi Y_1] - [\pi X_2, \pi Y_2] + i\big([\pi X_1, \pi Y_2] + [\pi X_2, \pi Y_1]\big) \\
&= [\pi X_1 + i\pi X_2, \pi Y_1 + i\pi Y_2] \\
&= [\pi_{\mathbb{C}}(X_1 + iX_2), \pi_{\mathbb{C}}(Y_1 + iY_2)].
\end{aligned}$$

Ist W ein Unterraum von V, der unter allen Elementen von $\pi_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ invariant ist, dann auch unter allen Elementen von $\pi(\mathfrak{g}) \subset \pi_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Ist umgekehrt W ein ($\mathbb{C}$-linearer) Unterraum von V der unter $\pi(\mathfrak{g})$ invariant ist, so gilt $\pi_{\mathbb{C}}(X_1 + iX_2)w = \pi(X_1)w + \pi(X_2)(iw) \in W$, für alle $X_1 + iX_2 \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ und $w \in W$, so dass W invariant unter $\pi_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ ist. □

In der Situation der vorangehenden Aussage befinden wir uns immer dann, wenn wir die komplexen Darstellungen einer reellen Lie-Gruppe betrachten. Diese induzieren also Darstellungen der komplexifizierten Lie-Algebra. Im nächsten Abschnitt werden wir das für den Fall der Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ diskutieren.

12.3. IRREDUZIBLE DARSTELLUNGEN VON SU(2) UND SO(3)

Wir haben gesehen, dass die Komplexifizierung der Lie-Algebra $\mathfrak{su}_2$ gerade $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ist (Prop. 12.8). Da SU_2 einfach zusammenhängend ist, entsprechen die komplexen Darstellungen von SU_2 genau den komplexen Darstellungen der Lie-Algebra $\mathfrak{su}_2$ (nach Kor. 8.3), und diese nach Prop. 12.9 genau den Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Irreduzibilität bleibt dabei in alle Richtungen erhalten, und im vorigen Abschnitt haben wir die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ bestimmt. Aus der Beschreibung dieser Darstellungen können wir jetzt genau sagen, wie die irreduziblen komplexen Darstellungen der Gruppe SU_2 aussehen.

Satz 12.10. *Für jedes $m \geqslant 0$ besitzt SU_2 genau eine irreduzible komplexe Darstellung der Dimension $m+1$, nämlich $\Pi_m\colon \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{GL}(V_m)$, wobei V_m der Vektorraum der komplexen homogenen Polynome vom Grad m in zwei Variablen ist und die Operation durch $\Pi_m(A)f(z) = f(A^{-1}z)$ für $A \in \mathrm{SU}_2$ und $f \in V_m$ gegeben ist.*

Beweis. Für den Beweis muss man sich nur noch überzeugen, dass die Darstellung Π_m auf der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ genau die Darstellung π_m auf Satz 11.16 induziert. Das ist klar, da wir π_m durch die gleiche Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ auf V_m definiert haben. □

Wir haben außerdem gesehen, dass die Lie-Algebren $\mathfrak{su}_2$ und $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ isomorph sind (Aufgabe H4.2). Explizit haben wir gezeigt, dass ein Isomorphismus $\varphi\colon \mathfrak{su}_2 \to \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ durch $\varphi(E_i) = F_i$ bezüglich der Basen

$$E_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, E_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gegeben ist. Da SU_2 einfach zusammenhängend ist, gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\Phi\colon \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, der φ induziert. Dieses Φ ist surjektiv (da φ surjektiv ist) und es gilt $\ker(\Phi) = \{I, -I\}$ (siehe Aufgabe H12.2). Beachte, dass damit $\Phi\colon \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ gerade die universelle Überlagerung von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ist.

Da die Gruppe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ aber nicht einfach zusammenhängend ist, ist nicht klar, ob jede Darstellung von $\mathsf{sl}_2(\mathbb{C})$ tatsächlich einer komplexen Darstellung von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ entspricht.

Satz 12.11. *Es sei $m \geqslant 0$ und sei $\pi_m\colon \mathsf{su}_2 \to \mathsf{gl}(V_m)$ die $m+1$-dimensionale irreduzible komplexe Darstellung von su_2. Sei $\sigma_m = \pi_m \circ \varphi^{-1}$ die entsprechende Darstellung von $\mathsf{so}_3(\mathbb{R})$.*

(1) Falls m gerade ist, dann existiert eine komplexe Darstellung $\Sigma_m\colon \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(V_m)$ mit $\Sigma_m(e^X) = e^{\sigma_m(X)}$ für alle $X \in \mathsf{so}_3(\mathbb{R})$.

(2) Falls m ungerade ist, so exisiert keine solche Darstellung.

Beweis. Es sei $\Pi_m\colon \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{GL}(V_m)$ die in Satz 12.10 angegebene Darstellung von SU_2, die π_m induziert und sei $\Phi\colon \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ die Überlagerungsabbildung mit $\ker(\Phi) = \{I, -I\}$. Wenn Σ_m wie in (1) existiert, dann folgt $\Pi_m = \Sigma_m \circ \Phi$ wegen $\pi_m = \sigma_m \circ \varphi$. Ein solches Σ_m existiert genau dann, wenn $-I \in \ker(\Pi_m)$ gilt.

Sei nun $u_0, \ldots, u_m$ die in (11.17) bestimmte Basis von V_m. Beachte, dass $E_1 = \frac{i}{2}H$ gilt, mit $H = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ wie zuvor. Da u_k ein Eigenvektor von H zum Eigenwert $m - 2k$ ist, gilt $\sigma_m(F_1)u_k = \pi_m(E_1)u_k = \frac{i}{2}(m-2k)u_k$. Wir erhalten also

$$\sigma_m(F_1) = \begin{bmatrix} \frac{i}{2}m & & & \\ & \frac{i}{2}(m-2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{i}{2}(-m) \end{bmatrix}$$

in der Basis $u_0, \ldots, u_k$. Mit $e^{2\pi E_1} = -I$ folgt

$$\Pi_m(-I) = \Pi_m\left(e^{2\pi E_1}\right) = e^{\pi_m(2\pi E_1)} = e^{\sigma_m(2\pi F_1)} = \begin{bmatrix} e^{\pi i m} & & & \\ & e^{\pi i(m-2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\pi i(-m)} \end{bmatrix} = (-1)^m I.$$

Also gilt $-I \in \ker(\Pi_m)$ genau dann, wenn m gerade ist. □

Übung H12.1. Die Heisenberg-Gruppe $H \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ operiert durch ihre Standarddarstellung auf $\mathbb{R}^3$. Bestimme alle invarianten Unterräume. Ist die Darstellung vollständig reduzibel?

Übung H12.2. Es sei $\mathrm{Ad}\colon \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{GL}(\mathsf{su}_2)$ die adjungierte Darstellung.
Setze $V = \mathsf{su}_2$ und führe auf V das Skalarprodukt $\langle X, Y\rangle = 2\,\mathrm{tr}(X\overline{Y}^T)$ ein. Zeige:

(a) Die Basis E_1, E_2, E_3 von V im Text ist eine Orthonormalbasis von V.
(b) Es gilt $\ker(\mathrm{Ad}) = \{I, -I\}$.
(c) Für jedes $A \in \mathrm{SU}_2$ ist die Abbildung $\mathrm{Ad}_A\colon V \to V$ orthogonal.
(d) Identifiziert man V durch die Basis E_1, E_2, E_3 mit $\mathbb{R}^3$, so erhält man also einen Homomorphismus $\mathrm{Ad}\colon \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Der induzierte Homomorphismus $\mathrm{ad}\colon \mathsf{su}_2 \to \mathsf{so}_3(\mathbb{R})$ von Lie-Algebren ist gerade der Isomorphismus φ im Text.

13. DARSTELLUNGEN VON $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ UND AUSBLICK

Ein Ziel der Darstellungstheorie besteht darin, alle irreduziblen Darstellungen einer gegebenen Lie-Gruppe oder Lie-Algebra vollständig zu bestimmen. Für die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ und die daran hängenden komplexen Darstellungen der Gruppen SU_2 und $SO_3(\mathbb{R})$ haben wir das im wesentlichen durch direkte Rechnung erreicht. Zum Abschluss skizzieren wir die Anfänge der allgemeinen Theorie am Beispiel der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Dabei geben wir nur einen Überblick und verweisen auf Hall [**3**, §5] für genauere Erläuterungen.

13.1. GEWICHTE UND WURZELN

Bei der Beschreibung der irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ spielen die Eigenwerte des Elements $H = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ eine wichtige Rolle. Wir haben gesehen, dass diese Eigenwerte für jede komplexe Darstellung ganzzahlig sind. Für $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ verfolgen wir nun einen ähnlichen Ansatz. Wir verwenden die folgende Basis der achtdimensionalen Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zu diesen acht Erzeugern kann man leicht die $\binom{8}{2} = 28$ Kommutatorrelationen ausrechnen, durch die die Lie-Algebra-Struktur von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ dann vollständig beschrieben ist.

Definition 13.1. Es sei $\pi\colon \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung. Sei m_1 ein Eigenwert von $\pi(H_1)$ und m_2 ein Eigenwert von $\pi(H_2)$ und seien U_1, U_2 die zugehörigen Eigenräume. Das Paar $\mu = (m_1, m_2)$ heißt ein *Gewicht* von π, falls $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$. Für $u \in U_1 \cap U_2$ gilt dann also

$$\pi(H_1)u = m_1 u$$
$$\pi(H_2)u = m_2 u.$$

Der Raum $U_1 \cap U_2$ heißt der *Gewichtsraum* und seine von Null verschiedenen Elemente die *Gewichtsvektoren* zum Gewicht μ.

Proposition 13.2. *Jede Darstellung von* $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ *besitzt ein Gewicht.*

Beweis. Es sei $\pi\colon \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung und sei $m_1 \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $\pi(H_1)$ mit Eigenraum U. Es gilt $[H_1, H_2] = 0$, d.h. H_1 und H_2 kommutieren. Deswegen gilt $\pi(H_2)U \subset U$. (Denn für $u \in U$ gilt $\pi(H_1)\pi(H_2)u = \pi(H_2)\pi(H_1)u = m_1\pi(H_2)u$, also $\pi(H_2)u \in U$.) Die Einschränkung von $\pi(H_2)$ auf U ist also eine lineare Abbildung $U \to U$ und besitzt wieder einen Eigenwert $m_2 \in \mathbb{C}$. Dann ist (m_1, m_2) ein Gewicht. □

Proposition 13.3. *Die Gewichte einer Darstellung von* $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ *sind ganzzahlig.*

Beweis. Sei $\pi\colon \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung mit Gewicht (m_1, m_2). Die von $\{H_1, X_1, Y_1\}$ erzeugte Unteralgebra von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ ist zu $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ isomorph, und die Einschränkung von π auf diese Unteralgebra ist eine Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Dabei ist m_1 ein Eigenwert von $\pi(H_1)$. Nach Satz 11.16 (und seinem Beweis), ist m_1 ganzzahlig. Entsprechendes gilt für m_2. □

Definition 13.4. Ein Gewicht α der adjungierten Darstellung $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}))$ mit $\alpha \neq (0,0)$ heißt eine *Wurzel* von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Die zugehörigen Gewichtsvektoren heißen die *Wurzelvektoren*. Ist $\alpha = (a_1, a_2)$ und $Z \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ ein Wurzelvektor, dann gilt also

$$[H_1, Z] = a_1 Z$$
$$[H_2, Z] = a_2 Z.$$

Mit Hilfe der Kommutatorrelationen von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ ist es nicht schwer, alle Wurzeln zu bestimmen. Es gibt nämlich genau die folgenden sechs Stück:

Wurzel	**Wurzelvektor**
$(2,-1)$	X_1
$(-1,2)$	X_2
$(1,1)$	X_3
$(-2,1)$	Y_1
$(1,-2)$	Y_2
$(-1,-1)$	Y_3

Übung 13.1. Verifiziere diese Tabelle und zeige, dass es keine weiteren Wurzeln von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ gibt.

Wurzeln und allgemeine Gewichte hängen über das folgende Lemma zusammen.

Lemma 13.5. *Es sei* $\alpha = (a_1, a_2)$ *eine Wurzel von* $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ *und* Z_α *ein zugehöriger Wurzelvektor. Sei* $\pi\colon \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ *eine Darstellung,* $\mu = (m_1, m_2)$ *ein Gewicht von* π *und* $v \neq 0$ *ein Gewichtsvektor zu* μ. *Dann gelten*

$$\pi(H_1)\pi(Z_\alpha)v = (m_1 + a_1)\pi(Z_\alpha)v$$
$$\pi(H_2)\pi(Z_\alpha)v = (m_2 + a_2)\pi(Z_\alpha)v.$$

Es ist also entweder $\pi(Z_\alpha)v = 0$ *oder* $\pi(Z_\alpha)v$ *ist ein Gewichtsvektor zum Gewicht*

$$\mu + \alpha = (m_1 + a_1, m_2 + a_2).$$

Beweis. Per Definition gilt $[H_1, Z_\alpha] = a_1 Z_\alpha$ und damit

$$\begin{aligned}\pi(H_1)\pi(Z_\alpha)v &= (\pi(Z_\alpha)\pi(H_1) + a_1\pi(Z_\alpha))v \\ &= \pi(Z_\alpha)(m_1 v) + a_1\pi(Z_\alpha)v \\ &= (m_1 + a_1)\pi(Z_\alpha)v.\end{aligned}$$

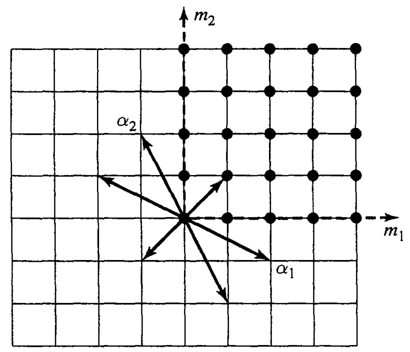
Entsprechendes gilt für $\pi(H_2)\pi(Z_\alpha)v$. □

13.2. DER SATZ VOM HÖCHSTEN GEWICHT

Wir fixieren die beiden Wurzeln $\alpha_1 = (2,-1)$ und $\alpha_2 = (-1,2)$ von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Diese haben die Eigenschaft, dass alle weiteren Wurzeln als ganzzahlige Linearkombinationen $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ und $n_1 n_2 \geqslant 0$ geschrieben werden können. Es gelten nämlich

$$(1,1) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (-2,1) = -\alpha_1, \quad (1,-2) = -\alpha_2, \quad (-1,1) = -\alpha_1 - \alpha_2.$$

Wir nennen α_1 und α_2 die *positiven einfachen Wurzeln*. (Sie sind durch die obige Eigenschaft nicht eindeutig bestimmt, und wir treffen eine feste Wahl).



Wurzeln von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ (*Quelle:* Hall [**3**, S. 134])

Definition 13.6. Wir führen eine partielle Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$ wie folgt ein: Für $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{Z}^2$ schreibe $\mu_1 \geq \mu_2$, wenn wenn es rationale Zahlen $a_1, a_2 \geqslant 0$ gibt derart, dass

$$\mu_1 - \mu_2 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2.$$

(Dies ist also gerade die komponentenweise partielle Ordnung auf $\mathbb{Q}^2$ in der Basis α_1, α_2.) Ist $\pi\colon \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung, so erhalten wir eine partielle Ordnung auf den Gewichten von π. Wir sagen, ein Gewicht μ_1 ist *höher* als ein Gewicht μ_2, falls $\mu_1 \geq \mu_2$ gilt. Ein Gewicht μ heißt *höchstes Gewicht*, wenn es höher als alle anderen Gewichte ist.

Übung 13.2. Zeige, dass die angegebene Relation auf $\mathbb{Z}^2$ tatsächlich eine partielle Ordnung ist.

Es gilt zum Beispiel $(1,0) > (0,0)$, wegen $(1,0) - (0,0) = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$. Betrachten wir die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, so ist die Wurzel $(1,1) = \alpha_1 + \alpha_2$ das eindeutig bestimmte höchste Gewicht.

Satz 13.7 (Satz vom höchsten Gewicht)**.**

(1) *Jede irreduzible Darstellung von* $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ *ist die direkte Summe ihrer Gewichtsräume. (D.h.* $\pi(H_1)$ *und* $\pi(H_2)$ *sind für jede Darstellung* π *simultan diagonalisierbar.)*
(2) *Jede irreduzible Darstellung von* $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ *besitzt ein eindeutiges höchstes Gewicht.*
(3) *Zwei irreduzible Darstellungen von* $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ *sind genau dann äquivalent, wenn sie das gleiche höchste Gewicht haben.*
(4) *Das höchste Gewicht einer irreduziblen Darstellung von* $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ *ist ein Paar nicht-negativer ganzer Zahlen.*
(5) *Zu jedem Paar* (m_1, m_2) *von nicht-negativen ganzen Zahlen existiert eine irreduzible Darstellung von* $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ *mit höchstem Gewicht* (m_1, m_2).
(6) *Die irreduzible Darstellung von* $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ *zum Gewicht* (m_1, m_2) *hat die Dimension*

$$\frac{1}{2}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2).$$

Beweis. Siehe Hall [3], Thm. 5.9 (bzw. §7.6.3 für Aussage (6)). □

13.3. DIE WEYL-GRUPPE

Definition 13.8. Es sei $\mathfrak{h}$ der von H_1, H_2 in $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ erzeugte Unterraum (der auch eine kommutative Unteralgebra ist). Wir fassen $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ als Komplexifizierung von $\mathfrak{su}_3$ auf und setzen

$$N = \left\{A \in \mathrm{SU}_3 \mid \text{Für alle } H \in \mathfrak{h} \text{ gilt } AHA^{-1} \in \mathfrak{h}\right\}$$
$$Z = \left\{A \in \mathrm{SU}_3 \mid \text{Für alle } H \in \mathfrak{h} \text{ gilt } AHA^{-1} = H\right\}.$$

Dann sind N und Z Untergruppen von SU_3 und Z ist normal in N. Die Faktorgruppe $W = N/Z$ heißt die *Weyl-Gruppe von* SU_3.

Satz 13.9. *Die Weyl-Gruppe von* SU_3 *ist isomorph zur symmetrischen Gruppe* S_3.

Beweis. Siehe Hall [3, Prop. 5.22]. □

Die Weyl-Gruppe operiert auf den Gewichten einer Darstellung. Es sei zunächst

$$\mathfrak{h}^* = \left\{\ell \mid \ell\colon \mathfrak{h} \to \mathbb{C} \text{ linear}\right\}$$

der Dualraum von $\mathfrak{h}$. Zu $A \in W$ und $\ell \in h^*$ definiere $A.\ell$ durch $(A.\ell)(X) = \ell(AXA^{-1})$ für $X \in \mathfrak{h}$. (Dies ist eine Darstellung $W \to \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$.)

Sei nun $\pi\colon \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung und $\mu = (m_1, m_2)$ ein Gewicht. Dann ist durch $\ell(H_1) = m_1$ und $\ell(H_2) = m_2$ ein lineares Funktional auf $\mathfrak{h}$ bestimmt. Für jedes $H = r_1H_1 + r_2H_2 \in \mathfrak{h}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{C})$ und jeden Gewichtsvektor $v \in V$ gilt dann

$$\pi(H)v = (r_1\pi(H_1) + r_2\pi(H_2))v = (r_1m_1 + r_2m_2)v = \ell(H)v.$$

Für $A \in W$ setze $A.\mu = (A.\ell(H_1), A.\ell(H_2))$.

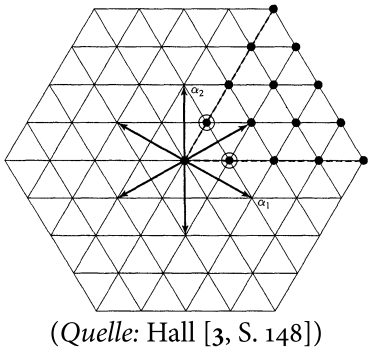
Proposition 13.10. *Für jedes Gewicht μ von π und jedes $A \in W$ ist $A.\mu$ wieder ein Gewicht.*

Beweis. Sei v ein Gewichtsvektor zum Gewicht μ und sei ℓ wie oben. Sei $\Pi\colon \mathrm{SU}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(V)$ die zu π gehörige Darstellung von SU_3. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\pi(H_i)\Pi(A)v &= \Pi(A)\Pi(A)^{-1}\pi(H_i)\Pi(A)v\\ &= \Pi(A)\pi(A^{-1}H_iA)v\\ &= \ell(A^{-1}H_iA)\Pi(A)v\\ &= (A^{-1}.\ell)(H_i)v\end{aligned}$$

für $i = 1, 2$. Also ist $\Pi(A)v$ ein Gewichtsvektor zum Gewicht $A^{-1}.\mu$. □

Dies zeigt also, dass die Weyl-Gruppe auf den Gewichten einer Darstellung operiert. Man führt nun einen rationalen Koordinatenwechsel durch und wählt eine Basis, in der die Weyl-Gruppe $W = S^3$ geometrisch folgendermaßen operiert: Der 3-Zyklus (123) operiert durch Drehung um $120°$; die Transposition (12) operiert als Spiegelung (siehe Hall [3, §5.6] für genaue Definitionen). Die Wirkung der Weyl-Gruppe auf den Wurzeln lässt sich damit jetzt so visualisieren:



(*Quelle:* Hall [3, S. 148])

Der hervorgehobene Bereich oben rechts zeigt dabei die Gitterpunkte, die in der ursprünglichen Basis den Gewichten $\mu = (m_1, m_2)$ mit $m_1, m_2 \geqslant 0$ entsprechen, also denen, die nach Satz 13.7 als höchstes Gewicht einer irreduziblen Darstellung auftreten können.

Der folgende Satz zeigt nun, dass man aus dem höchsten Gewicht einer Darstellung durch die Operation der Weyl-Gruppe alle Gewichte einer Darstellung berechnen kann.

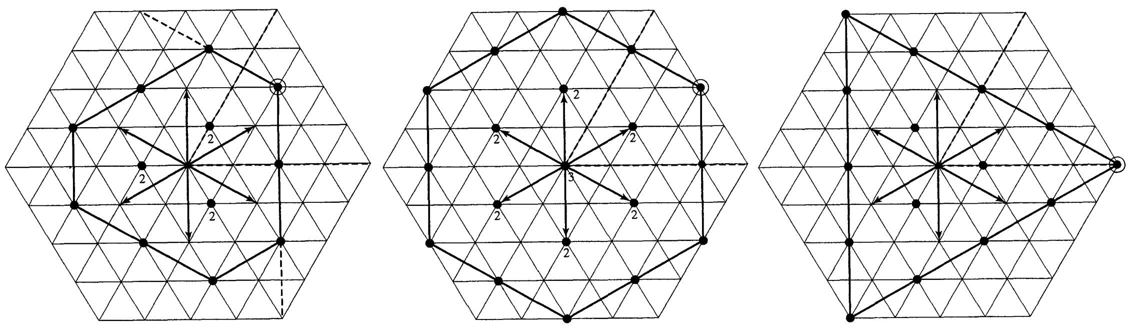
Satz 13.11. *Es sei $\pi\colon \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ eine irreduzible Darstellung mit höchstem Gewicht μ_0. Genau dann ist $\mu \in \mathbb{Z}^2$ ein Gewicht von π, wenn die folgenden beiden Aussagen gelten:*

(1) *Es gibt ganze Zahlen $n_1, n_2 \geqslant 0$ mit $\mu_0 = \mu + n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2$.*
(2) *Der Punkt μ liegt in der konvexen Hülle des Orbits von μ_0 unter der Wirkung der Weyl-Gruppe. Das heißt, es gibt $\lambda_A \in [0,1]$ für alle $A \in W$ mit $\sum_{A\in W} \lambda_A = 1$ und*

$$\mu = \sum_{A\in W} \lambda_A \cdot (A.\mu_0).$$

Beweis. Siehe Hall [**3**, Thm. 5.26]. □

Die Menge der Gewichte einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ ist also ein Polytop (die konvexe Hülle von endlich-vielen Punkten) in der Ebene mit rationalen Ecken. Die folgenden Diagramme zeigen die Gewichte für verschiedene höchste Gewichte.



$\mu_0 = (1,2)$ $\mu_0 = (2,2)$ $\mu_0 = (4,0)$

Der hier skizzierte Ansatz verallgemeinert sich von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ auf die sogenannten halbeinfachen Lie-Algebren. (Vielleicht am wenigsten offensichtlich ist dabei das geeignete Analogon zu $\mathfrak{h}$, die von H_1 und H_2 in $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ erzeugte Unteralgebra. An ihre Stelle tritt die sogenannte *Cartan-Unteralgebra*, eine ausreichend große kommutative Unteralgebra einer Lie-Algebra.) Die Theorie gipfelt in der Klassifikation aller halbeinfachen Lie-Algebren und ihrer irreduziblen Darstellungen mit Hilfe ihrer Wurzelsysteme.

ZITIERTE LITERATUR

[1] T. Bröcker und K. Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer-Verlag, Berlin, 1973. Heidelberger Taschenbücher, Band 143.

[2] W. Fulton und J. Harris. *Representation theory*, Bd. 129 von *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. doi:10.1007/978-1-4612-0979-9. A first course, Readings in Mathematics. URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0979-9`

[3] B. C. Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations*, Bd. 222 von *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003. An elementary introduction.

[4] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[5] J. Hilgert und K.-H. Neeb. *Lie groups and Lie algebras. (Lie-Gruppen und Lie-Algebren.)*. Braunschweig: Vieweg, 1991.

[6] V. S. Varadarajan. *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Bd. 102 von *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1984. Reprint of the 1974 edition.