Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PD Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2014/2015

TOPOLOGIE

Klausur zur Vorlesung, 11. Februar 2015

Bearbeitungszeit: 85 Minuten
Anleitung:

- Sie bekommen die Bestnote, wenn Sie **mindestens 50 Punkte** erzielen.
- Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf **jedes Blatt**.

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Seien M und N zwei Mengen und sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Falls f in allen Topologien auf M und N stetig ist, so ist f konstant. **(5 Punkte)**

(b) Seien X und Y topologische Räume. Falls alle Abbildungen $X \to Y$ stetig sind, dann muss X diskret sein oder Y indiskret. **(5 Punkte)**

Lösung. (a) Wir wählen auf N die diskrete Topologie, in der alle Teilmengen offen sind und auf M die indiskrete Topologie, in der nur $\varnothing$ und M offen sind. Ist dann $y \in f(M)$ ein Punkt, so ist $\{y\}$ offen in N und damit $f^{-1}(y)$ offen in M. Wegen $y \in f(M)$ ist $f^{-1}(y)$ nicht leer, also $f^{-1}(y) = M$. Somit ist f konstant.

(b) Angenommen Y ist nicht indiskret. Dann besitzt Y eine echte offene Teilmenge V. Wähle $y_0 \in V$ und $y_1 \in Y \setminus V$. Ist $x_0 \in X$ beliebig, so definiere $f\colon X \to Y$ durch $f(x_0) = y_0$ und $f(x) = y_1$ für alle $x \neq x_0$. Dann ist $f^{-1}(V) = \{x_0\}$. Also ist $\{x_0\}$ offen. Da dies für jedes $x_0 \in X$ gilt, sind also alle Punkte in X offen. Damit ist X ein diskreter Raum.

2. Seien X, Y topologische Räume und sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Surjektion.

(a) Zeigen Sie: Ist X zusammenhängend, so auch Y. **(5 Punkte)**

(b) Sei X wegzusammenhängend. Folgt dann, dass auch Y wegzusammenhängend ist? **(5 Punkte)**

Lösung. (a) Es sei $Y = U \cup V$ mit $U, V \subset Y$ offen und disjunkt. Wir müssen zeigen, dass dann $U = \varnothing$ oder $V = \varnothing$ gilt. Da f stetig ist, sind $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen in X und da X zusammenhängend ist, folgt aus $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, dass $f^{-1}(U) = \varnothing$ oder $f^{-1}(V) = \varnothing$. Da f surjektiv ist, folgt $U = \varnothing$ oder $V = \varnothing$.

(b) Ja! Denn sind $y_0, y_1 \in Y$, so $x_0, x_1 \in X$ mit $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$ und einen Weg $g\colon [0,1] \to X$ mit $g(0) = x_0$ und $g(1) = x_1$. Dann ist $f \circ g$ ein Weg in Y mit $f(g(0)) = y_0$ und $f(g(1)) = y_1$.

3. (a) Zeigen Sie, dass jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums abgeschlossen ist. **(6 Punkte)**

(b) Geben Sie ein Beispiel für einen topologischen Raum X und eine kompakte Teilmenge Y von X, die nicht abgeschlossen ist. **(4 Punkte)**

Lösung. Sei X ein Hausdorffraum und $Y \subset X$ kompakt. Sei $x_0 \in X \setminus Y$. Wir müssen zeigen, dass es eine Umgebung von x_0 gibt, die Y nicht schneidet. Dann folgt, dass $X \setminus Y$ offen und damit Y abgeschlossen ist. Da X ein Hausdorffraum ist, gibt es zu jedem $y \in Y$ Umgebungen U_y von x_0 und V_y von y mit $U_y \cap V_y = \varnothing$. Dann ist $Y = \bigcup_{y \in Y} V_y$ und da Y kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $y_1, \dots, y_n \in Y$ mit $Y = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$. Setze $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$. Dann ist U eine Umgebung von x_0, die Y nicht schneidet. (Denn zu $y \in Y$ gibt es $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $y \in V_{y_k}$ und damit $y \notin U_{y_k}$, also $y \notin U$.)

(b) Ist X ein endlicher topologischer Raum, der nicht diskret ist, dann gibt es in X eine Teilmenge Y, die nicht abgeschlossen ist. Da X jedoch endlich ist, gibt es nur endlich viele offene Mengen in X. Also muss Y kompakt sein. (Für ein konkretes Beispiel, betrachte etwa den Sierpiński-Raum mit zwei Elementen.)

4. Es sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X.

(a) Definieren Sie die Quotiententopologie auf der Menge der Äquivalenzklassen X^*. **(3 Punkte)**

(b) Zeigen Sie: Ist X zusammenhängend, so auch X^*. **(2 Punkte)**

(c) Sei $X = [0,1]$ und die Äquivalenzrelation wie folgt definiert:

$$x_1 \sim x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1, x_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x_1, x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Beschreiben Sie den Raum X^* so explizit wie möglich. **(5 Punkte)**

Lösung. (a) Es sei $p \colon X \to X^*$ die Quotientenabbildung, die einem Punkt x seine Äquivalenzklasse $[x]$ zuordnet. In der Quotiententopologie auf X^* ist eine Menge U von Äquivalenzklassen genau dann offen, wenn $p^{-1}(U)$ (also die Vereinigung der Äquivalenzklassen in U) offen in X ist.

(b) Da die Projektion p stetig und surjektiv ist, folgt das sofort aus Aufgabe 2(a). Oder man rechnet es hier nochmal nach: Es sei $X^* = U \cup V$ mit U, V offen und disjunkt in X^*. Dann folgt $X = p^{-1}(U) \cup p^{-1}(V)$, also $p^{-1}(U) = \varnothing$ oder $p^{-1}(V) = \varnothing$. Da p surjektiv ist, folgt $U = \varnothing$ oder $V = \varnothing$.

(c) Per Definition hat X nur zwei Äquivalenzklassen, also hat X^* zwei Punkte $a = p([0, \frac{1}{2}])$ und $b = p((\frac{1}{2}, 1])$. Dabei ist $p^{-1}(\{b\})$ offen in X und deshalb auch $\{b\}$. Hingegen ist $p^{-1}(\{a\})$ nicht offen in X, deshalb $\{a\}$ nicht offen in X^*. Also sind die offenen Mengen in X^* genau $\{\varnothing, X^*, \{a\}\}$. (Damit ist X^* der Sierpiński-Raum.)

5. (a) Beweisen Sie direkt, dass für jede stetige Abbildung $f \colon S^1 \to \mathbb{R}$ ein Punkt $x \in S^1$ mit $f(x) = f(-x)$ existiert. **(5 Punkte)**

(b) Beweisen Sie das Folgende mit Resultaten aus der Vorlesung: Ist $h \colon S^1 \to S^1$ stetig und nullhomotop, so gibt es einen Punkt $x \in S^1$ mit $h(x) = x$. **(5 Punkte)**

Lösung. (a) Betrachte die stetige Abbildung $g\colon S^1 \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(-x)$. Falls $g(x) = 0$ für alle $x \in S^1$, dann sind wir fertig. Andernfalls gibt es $x_0 \in S^1$ mit $g(x_0) \neq 0$. Falls $g(x_0) > 0$, so folgt $g(-x_0) = f(-x_0) - f(x_0) = -g(x_0) < 0$. Da S^1 zusammenhängend ist, folgt $0 \in g(S^1)$. Also gibt es $x \in S^1$ mit $g(x) = 0$, wie gewünscht. Der Fall $g(x_0) < 0$ geht genauso.

(b) Da h nullhomotop ist, setzt h nach einem Resultat aus der Vorlesung zu einer stetigen Abbildung $H\colon B^2 \to S^1$ fort. Diese können wir durch Komposition mit der Inklusion $S^1 \to B^2$ als Abbildung $B^2 \to B^2$ auffassen. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz besitzt H einen Fixpunkt, also $x \in B^2$ mit $H(x) = x$. Aber das Bild von H ist in S^1 enthalten, also muss $x \in S^1$ gelten und damit $h(x) = H(x) = x$.

6. (a) Zeigen Sie, dass $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$ die triviale Gruppe ist. **(3 Punkte)**

(b) Sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ und $r\colon X \to Y$ eine Retraktion (d.h. r ist stetig mit $r|_Y = \mathrm{id}_Y$). Zeigen Sie: Für jedes $y_0 \in Y$ ist

$$r_*\colon \pi_1(X, y_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

surjektiv. **(4 Punkte)**

(c) Zeigen Sie, dass keine Retraktion von $\mathbb{R}^2$ auf $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ existiert. (Die Fundamentalgruppe von S^1 darf als bekannt vorausgesetzt werden.) **(3 Punkte)**

Lösung. (a) Per Definition ist $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$ die Gruppe der Äquivalenzklassen geschlossener Wege mit Basispunkt 0 in $\mathbb{R}^n$ bis auf Weghomotopie. Ist $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg mit $f(0) = f(1) = 0$, so ist

$$F(x,t) = (1-t)f(x)$$

eine Homotopie in $\mathbb{R}^n$ von f zum konstanten Weg e_0. Also ist jeder geschlossene Weg mit Basispunkt 0 nullhomotop und daher $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = \{[e_0]\}$ die triviale Gruppe.

(b) Es sei $j\colon Y \to X$ die Inklusionsabbildung, dann gilt $r \circ j = \mathrm{id}_Y$. Für die induzierten Abbildungen $r_*\colon \pi_1(X, y_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ und $j_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, y_0)$ gilt daher $r_* \circ j_* = (r \circ j)_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$. Also besitzt r_* ein Rechts-Inverses und ist damit surjektiv.

(c) Die Fundamentalgruppe von S^1 ist unendlich zyklisch. Nach (a) ist die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^2$ dagegen trivial. Es kann also keine surjektive Abbildung $\pi_1(\mathbb{R}^2, x_0) \to \pi_1(S^1, y_0)$ (für irgendwelche Basispunkte $x_0 \in S^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$) geben und deshalb nach (b) auch keine Retraktion von S^1 nach $\mathbb{R}^2$.

7. Betrachten Sie die glatte Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 1 - x^2 - 2y^2 \end{cases}.$$

(a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte und kritischen Werte von f. **(4 Punkte)**

(b) Zeigen Sie, dass

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \geqslant 0\}$$

eine glatte zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist. **(3 Punkte)**

(c) Zeigen Sie, dass ∂M zu S^1 diffeomorph ist. **(3 Punkte)**

Lösung. (a) Die Ableitung von f an der Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist durch den Gradient $(\nabla f)(x, y)$. Dieser induziert eine surjektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ genau dann, wenn er nicht der Nullvektor ist. Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist also genau dann kritisch, wenn

$$(\nabla f)(x) = \begin{pmatrix} -2x \\ -4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt, also genau dann, wenn $(x, y) = 0$. Die kritischen Werte von f sind damit $f(0, 0) = 1$, alle anderen Werte sind regulär.

(b) Da 0 nach (a) ein regulärer Wert ist, ist M nach einem Satz aus der Vorlesung eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\}$.

(c) Nach (b) ist der Rand von M die Ellipse $\partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1\}$. Diese wird durch den Diffeomorphismus

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, \sqrt{2}y) \end{cases}$$

auf S^1 abgebildet.