Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2014/2015

TOPOLOGIE

Lösungen der ausgewählten Aufgaben aus dem Skript

1.2 Gib ein Beispiel für eine unendliche Menge von offenen Intervallen in $\mathbb{R}$, deren Durchschnitt nicht offen ist. Gib ebenso ein Beispiel einer unendlichen Menge von abgeschlossenen Intervallen, deren Vereinigung nicht abgeschlossen ist.

Lösung. Der Durchschnitt der Menge $\{(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ von offenen Intervallen ist das abgeschlossene Intervall $[-1,1]$ und damit nicht offen. Die Vereinigung der abgeschlossenen Intervalle $\{[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist das offene Intervall $(-1,1)$ und damit nicht abgeschlossen.

1.3 Es sei $X = \{a,b\}$. Zeige, dass es keine Metrik auf X gibt, die die Sierpiński-Topologie induziert.

Lösung. Es sei d eine Metrik auf X. Dann haben die Punkte a und b irgendeinen Abstand $\delta = d(a,b) > 0$ (wegen $a \neq b$). Es folgt $B_d(b,\delta) = \{b\}$ und diese Menge ist offen in der metrischen Topologie, nicht jedoch in der Sierpiński-Topologie.

1.10 Es sei X ein topologischer Raum. Zeige:
(a) Für zwei Teilmengen $M, N \subset X$ gilt $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.
(b) Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Teilmengen von X. Beweise die Inklusion

$$\bigcup_{M \in \mathcal{M}} \overline{M} \subset \overline{\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M}.$$

(c) Was stimmt nicht mit dem folgenden 'Beweis' für die umgekehrte Inklusion in (b)?
„Ist $x \in \overline{\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M}$, so schneidet jede Umgebung von x die Vereinigung $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$. Also gibt es $M \in \mathcal{M}$ mit $U \cap M \neq \emptyset$. Also gilt $x \in \overline{M}$ und damit $x \in \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \overline{M}$. q.e.d.“
(d) Gib ein Beispiel, in dem die umgekehrte Inklusion in (b) nicht gilt.

Lösung. (a) $\overline{M} \cup \overline{N}$ enthält M und N und ist die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen und damit abgeschlossen. Nach Definition des Abschlusses gilt daher $\overline{M \cup N} \subset \overline{M} \cup \overline{N}$. Für die umgekehrte Inklusion, sei $x \in \overline{M} \cup \overline{N}$. Dann $x \in \overline{M}$ oder $x \in \overline{N}$, etwa $x \in \overline{M}$. Dies bedeutet, dass jede Umgebung von x die Menge M schneidet. Also schneidet auch jede Umgebung von x die Menge $M \cup N$, was $x \in \overline{M \cup N}$ zeigt. Der Fall $x \in \overline{N}$ geht analog.

(b) Sei $M \in \mathcal{M}$. Die Menge $\overline{\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M}$ ist abgeschlossen und enthält M. Also gilt $\overline{M} \subset \overline{\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M}$. Da dies für jedes $M \in \mathcal{M}$ gilt, folgt $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} \overline{M} \subset \overline{\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M}$.
(c) Das Problem besteht darin, dass die Wahl von $M \in \mathcal{M}$ von der Umgebung U abhängt. Damit der Punkt x in $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} \overline{M}$ liegt, muss es aber mindestens ein (festes) $M \in \mathcal{M}$ geben, derart, dass *jede* Umgebung von x dieses bestimmte M schneidet.
(d) Ist z.B. $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{M}$ die Menge aller einelementigen Mengen von rationalen Zahlen, so gilt $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} \overline{M} = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M = \mathbb{Q}$, aber $\overline{\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Viele andere Beispiele, etwa mit Familien von Intervallen wie in 1.2, sind möglich.

1.14 Zeige:

(a) Die Sorgenfrey-Topologie auf $\mathbb{R}$ ist strikt feiner als die euklidische.
(b) Die K-Topologie auf $\mathbb{R}$ ist strikt feiner als die euklidische.
(c) Die Sorgenfrey-Topologie und die K-Topologie sind nicht vergleichbar.

Lösung. (a) Ist (a, b) ein beschränktes offenes Intervall, so gilt

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + 1/n, b).$$

Da die halboffenen Intervalle auf der rechten Seite offen in der Sorgenfrey-Topologie sind, ist auch (a, b) als Vereinigung offener Mengen offen. Damit sind alle Basismengen der euklidischen Topologie offen in der Sorgenfrey-Topologie und somit auch alle anderen offenen Mengen, was zeigt, dass die Sorgenfrey-Topologie feiner ist als die euklidische. Andererseits ist jedes halboffene Intervall $[a, b)$ offen in der Sorgenfrey-Topologie aber nicht in der euklidischen, was zeigt, dass die Sorgenfrey-Topologie strikt feiner ist.
(b) Dass die K-Topologie feiner ist als die euklidische, ist klar, da ihre Basis per Definition alle beschränkten offenen Intervalle enthält und damit eine Basis der euklidischen Topologie. Sie ist auch strikt feiner: Die Menge $(-1, 1) \setminus K$ ist offen in der K-Topologie. In der euklidischen Topologie ist dagegen 0 kein innerer Punkt dieser Menge, denn jede Umgebung von 0 schneidet K.
(c) Wir müssen in beiden Topologien jeweils eine offene Menge finden, die bezüglich der anderen nicht offen ist. Die Menge $[-1, 1)$ ist offen in der Sorgenfrey-Topologie, nicht jedoch in der K-Topologie. Denn es gibt keine Basismenge B in der K-Topologie mit $-1 \in B$ und $B \subset [-1, 1)$. Umgekehrt ist die Menge $(-1, 1) \setminus K$ nicht offen in der Sorgenfrey-Topologie. Denn es gibt kein halboffenes Intervall I mit $0 \in I$ und $I \subset (-1, 1) \setminus K$.

1.28 Finde eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nur in genau einem Punkt stetig ist.

Lösung. Bekanntlich ist die Indikator-Funktion von $\mathbb{Q}$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nirgends stetig. Denn ist $x \notin \mathbb{Q}$ und $\varepsilon = 1/2$, so gibt es kein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| = |f(y)| < 1/2$ für alle y mit $|x - y| < \delta$, denn jede δ-Umgebung von x enthält auch rationale Zahlen. Analog geht der Fall $x \in \mathbb{Q}$.

Dieses Beispiel kann man abwandeln, um die gesuchte Funktion zu finden. Betrachte

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Behaupte, dass g genau in 0 stetig ist und nirgends sonst. In jedem Punkt $x \neq 0$ ist g unstetig. Denn ist $x \neq 0$, so setze $\varepsilon = |x|/2$ und da jede Umgebung von x rationale und irrationale Zahlen enthält, gibt es wieder kein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle y mit $|x - y| < \delta$. Dagegen ist g im Punkt 0 stetig. Denn für $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \varepsilon/2$, dann gilt $|f(x) - f(y)| < 2\delta = \varepsilon$ für alle y mit $|x - y| < \delta$.

1.30 Es sei X ein topologischer Raum und sei Y ein Hausdorff-Raum. Sei $M \subset X$ eine dichte Teilmenge (also $\overline{M} = X$). Zeige: Sind f_1, f_2 zwei stetige Abbildungen $X \to Y$ mit $f_1|_M = f_2|_M$, so folgt $f_1 = f_2$.

Lösung. Angenommen falsch, dann gibt es $x \in X$ mit $f_1(x) \neq f_2(x)$. Da Y ein Hausdorff-Raum ist, existieren dann Umgebungen U bzw. V von $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ mit $U \cap V = \varnothing$. Da f_1 und f_2 stetig sind, sind $f_1^{-1}(U)$ und $f_2^{-1}(V)$ offen und haben nicht-leeren Schnitt, denn beide enthalten x. Da M dicht in X ist, gibt es also $y \in M \cap f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$. Nach Voraussetzung folgt $f_1(y) = f_2(y) \in U \cap V$, ein Widerspruch.

Bemerkung. Wenn Y kein Hausdorff-Raum ist, kann die Behauptung im allgemeinen nicht stimmen. Ist zum Beispiel $Y = \{a, b\}$ der Sierpiński-Raum (mit Topologie $\{\varnothing, \{a\}, Y\}$) und $X = \mathbb{R}$, so sind die Funktionen $f\colon x \mapsto a$ für alle x und $g\colon x \mapsto a$ für $x \neq 0$ und $g(0) = b$ beide stetig und stimmen auf der dichten Teilmenge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ überein, sind aber nicht gleich.

2.1 Es sei X ein topologischer Raum. Ein Teilraum Y von X ist genau dann nicht zusammenhängend, wenn Y die Vereinigung zweier disjunkter nichtleerer Teilmengen A und B ist derart, dass A keinen Häufungspunkt von B enthält und umgekehrt.

Lösung. In der ursprünglichen Fassung dieser Aufgabe fehlte eine Voraussetzung. Eine korrekte Lösung bestand daher auch darin, ein Gegenbeispiel zu dieser falsch formulierten Behauptung anzugeben.
Zur Aufgabe, wie sie hier formuliert ist: Ist Y nicht zusammenhängend, so gibt es zwei Teilmengen A und B von Y, die offen in Y sind mit $Y = A \cup B$ und $A \cap B = \varnothing$. Dann gibt es offene Teilmengen U und V von X mit $A = U \cap Y$ und $B = V \cap Y$. Ist nun $x \in A$, so ist U eine Umgebung von x mit $U \cap B = \varnothing$, so dass x kein Häufungspunkt von B ist. Analog zeigt man, dass B keinen Häufungspunkt von A enthält.
Sei umgekehrt $Y = A \cup B$ mit A, B nicht-leer und disjunkt und derart, dass A keinen Häufungspunkt von B enthält und umgekehrt. Sei x in A. Da x kein Häufungspunkt von B ist und $x \notin B$, gibt es eine Umgebung U von x in X mit $U \cap B = \varnothing$. Also gilt $U \cap Y \subset A$, was zeigt, dass x ein innerer Punkt von A in Y ist. Damit ist A offen in Y. Genauso ist B offen in Y. Das zeigt, dass Y nicht zusammenhängend ist.

2.7 Sei U eine offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass U wegzusammenhängend ist. (*Hinweis.* Betrachte die Menge aller Punkte in U, die mit einem festen Punkt $x_0 \in U$ verbindbar sind.)

Lösung. Falls $U = \varnothing$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls, sei $x_0 \in U$ und sei V die Menge aller Punkte in U, die mit x_0 verbindbar sind. Wegen $x_0 \in V$, ist V nicht leer. Wir zeigen zunächst, dass V offen ist. Sei $x \in V \subset U$. Da U offen in $\mathbb{R}^n$ ist, enthält U eine ε-Umgebung von x, also $B(x,\varepsilon) \subset U$. Jeder Punkt in $B(x,\varepsilon)$ ist über einen geraden Weg mit x verbindbar. Wegen $x \in V$ ist damit jeder Punkt in $B(x,\varepsilon)$ mit x_0 verbindbar, was $B(x,\varepsilon) \subset V$ zeigt. Also ist jeder Punkt von V innerer Punkt und damit V offen. Angenommen V wäre eine echte Teilmenge von U, also $U \setminus V \neq \varnothing$. Sei $x \in U \setminus V$. Da U offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subset U$. Da jeder Punkt in $B(x,\varepsilon)$ mit x verbindbar ist, x aber nicht mit x_0 verbindbar, muss $B(x,\varepsilon) \cap V = \varnothing$ gelten. Also ist x ein innerer Punkt von $U \setminus V$. Damit ist $U \setminus V$ offen, also V abgeschlossen in U. Somit ist V eine nicht-leere echte Teilmenge von U, die sowohl offen als auch abgeschlossen in U ist, im Widerspruch dazu, dass U zusammenhängend ist.

2.19 Es seien X und Y topologische Räume.

(a) Zeige: Ist Y kompakt, so ist die Projektion $\pi_1\colon X \times Y \to X$, $(x,y) \mapsto x$, auf den ersten Faktor eine abgeschlossene Abbildung.

(b) Gib ein Beispiel einer abgeschlossenen Teilmenge in $\mathbb{R}^2$, deren Projektion auf die horizontale Achse nicht abgeschlossen ist.

Lösung. (a) Dies folgt aus dem in der Vorlesung bewiesenen Schlauchlemma. Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$. Zeige, dass auch $\pi(A)$ abgeschlossen ist. Falls $\pi(A) = X$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls, sei $x_0 \in X \setminus \pi(A)$. Dann ist also $\{x_0\} \times Y$ in der offenen Teilmenge $(X \times Y) \setminus A$ enthalten. Nach dem Schlauchlemma gibt es eine Umgebung W von x_0 in X mit $W \times Y \subset (X \times Y) \setminus A$. Daraus folgt $W \cap \pi(A) = \varnothing$, so dass x_0 ein innerer Punkt von $X \setminus \pi(A)$ ist. Damit ist $X \setminus \pi(A)$ offen und $\pi(A)$ also abgeschlossen.
Wenn man das Schlauchlemma nicht verwenden will, kann man auch einen direkten Beweis geben (der allerdings dem des Schlauchlemmas sehr ähnelt). Sei $x_0 \in X \setminus \pi(A)$ wie oben, dann gilt also $(\{x_0\} \times Y) \cap A = \varnothing$. Da $(X \times Y) \setminus A$ offen ist, besitzt jeder Punkt (x_0, y) eine offene Umgebung U_y in $X \times Y$ mit $U_y \cap A = \varnothing$. Die Menge $\{U_y \mid y \in Y\}$ ist eine offene Überdeckung von Y. Da Y kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_n}\}$. Setze $W = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$. Dann ist W eine offene Umgebung von x_0, die $\pi(A)$ nicht schneidet. Es folgt wie oben, dass $\pi(A)$ abgeschlossen ist.
(b) Betrachte die Hyperbel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Sie ist abgeschlossen, denn sie ist das Urbild von $\{0\}$ unter der stetigen Funktion $(x,y) \mapsto xy - 1$. Ihre Projektion auf die x-Achse ist aber die nicht-abgeschlossene Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.20 Sei X ein topologischer Raum und Y ein kompakter Hausdorff-Raum. Zeige, dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn der *Graph von f*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

in $X \times Y$ abgeschlossen ist.

Lösung. Es sei f stetig und sei $(x,y) \in (X \times Y) \setminus \Gamma_f$. Dann ist also $f(x) \neq y$, und da Y ein Hausdorff-Raum ist, gibt es Umgebungen U bzw. V von $f(x)$ bzw. y mit

$U \cap V = \varnothing$. Dann ist $f^{-1}(U) \times V$ eine Umgebung von (x, y) in $X \times Y$, die Γ_f nicht schneidet. (Denn wäre $(x', y') \in (f^{-1}(U) \times V) \cap \Gamma_f$, so $f(x') = y' \in U \cap V$, ein Widerspruch.) Damit ist gezeigt, dass das Komplement von Γ_f offen ist, also Γ_f abgeschlossen. (Beachte, dass wir für diese Implikation die Kompaktheit von Y nicht gebraucht haben.)
Sei umgekehrt Γ_f abgeschlossen. Sei $A \subset Y$ abgeschlossen. Da Γ_f abgeschlossen ist, ist auch $B = \Gamma_f \cap (X \times A)$ abgeschlossen. Nun ist $f^{-1}(A)$ die Projektion von B auf den ersten Faktor. Da Y kompakt ist, ist diese Projektion abgeschlossen, nach der vorigen Aufgabe. Also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen, was zeigt, dass f stetig ist.

3.3 (a) Definiere eine Äquivalenzrelation auf $X = \mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \quad \Leftrightarrow \quad x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2.$$

Der zugehörige Quotient X^* ist zu einem vertrauten topologischen Raum homöomorph. Welcher Raum ist das?
(b) Beantworte dieselbe Frage für die Äquivalenzrelation

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \quad \Leftrightarrow \quad x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

Lösung. (a) Jede Äquivalenzklasse unter dieser Relation enthält einen eindeutigen Punkt der Form $(x_0, 0)$. Denn (x, y) ist äquivalent zu $(x + y^2, 0)$. Andererseits sind $(x, 0)$ und $(x', 0)$ für $x \neq x'$ inäquivalent. Der Quotient X^* ist deshalb homöomorph zur reellen Geraden.
(b) Hier enthält jede Äquivalenzklasse einen eindeutigen Punkt der Form $(x_0, 0)$ mit $x_0 \geqslant 0$. Denn ein Punkt (x, y) ist äquivalent zu $(\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$. Wieder sind $(x, 0)$ und $(x', 0)$ mit $x, x' \geqslant 0$ für $x \neq x'$ inäquivalent. Der Quotient X^* ist deshalb homöomorph zur Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

3.4 Seien X, Y topologische Räume.
(a) Es sei $p\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeige: Wenn es eine stetige Abbildung $f\colon Y \to X$ gibt derart, dass $p \circ f = \mathrm{id}_Y$ gilt, dann ist p eine Quotientenabbildung.
(b) Eine *Retraktion* von X auf eine Teilmenge $A \subset X$ ist eine stetige Abbildung $r\colon X \to A$ mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$. Zeige, dass jede Retraktion eine Quotientenabbildung ist.

Lösung. (a) Aus der Voraussetzung folgt zunächst, dass p surjektiv ist. Denn ist $y \in Y$, so gilt $y = p(f(y)) \in p(X)$. Es sei nun U eine Teilmenge von Y derart, dass $p^{-1}(U)$ offen ist. Wir müssen zeigen, dass dann U offen ist. Es gilt $U = (p \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(p^{-1}(U))$. Da f stetig ist, ist damit U offen.
(b) Es sei $f\colon A \to X$ die Inklusion $a \mapsto a$ von A in X. Dann gilt $r \circ f = \mathrm{id}_A$, so dass r nach (a) eine Quotientenabbildung ist.

4.3 Ein Raum X heißt *kontrahierbar*, wenn die Identität $i_X: X \to X$ nullhomotop ist. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Die Räume $[0,1]$ und $\mathbb{R}$ sind kontrahierbar.

(b) Jeder kontrahierbare Raum ist wegzusammenhängend.

(c) Ist Y kontrahierbar, so sind alle stetigen Abbildungen $X \to Y$ homotop.

(d) Ist X kontrahierbar und Y wegzusammenhängend, so sind alle stetigen Abbildungen $X \to Y$ homotop.

Lösung. (a) Für $X = [0,1]$ oder $X = \mathbb{R}$ ist

$$F: X \times I \to X, (x,t) \mapsto tx$$

eine Homotopie von $i_X = F(\cdot,1)$ mit der Nullabbildung $F(\cdot,0)$.

(b) Sei X ein kontrahierbarer Raum, F eine Homotopie mit $F(\cdot,0) = i_X$ und $F(x,1) = x_0$ für alle $x \in X$ und festes $x_0 \in X$. Seien a und b in X zwei Punkte. Dann ist $t \mapsto F(a,t)$ ein Weg von a nach x_0 und $F(b,1-t)$ ein Weg von x_0 nach b. Also ist $F(a,t) * F(b,1-t)$ ein Weg von a nach b in X.

(c) Es sei Y kontrahierbar und G eine Homotopie mit $G(\cdot,0) = i_Y$ und $G(y,1) = y_0$ für alle $y \in Y$ und festes $y_0 \in Y$. Ist nun $f: X \to Y$ stetig, so ist $G(f(x),t)$ eine Homotopie zwischen f und der konstanten Abbildung $x \mapsto y_0$. Also sind alle stetigen Abbildungen $X \to Y$ zu dieser konstanten Abbildung homotop.

(d) Sei F eine Homotopie wie in (b) zwischen der Identität auf X und der konstanten Abbildung mit Wert $x_0 \in X$. Fixiere einen Punkt $y_0 \in Y$. Sei nun $f: X \to Y$ stetig. Da Y wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg α von $f(x_0)$ nach y_0 in Y. Dann ist

$$H(x,t) \begin{cases} f(F(x,2t)) & \text{für } t \in [0,1/2] \\ \alpha(2t-1) & \text{für } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

eine Homotopie mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = y_0$ für alle $x \in X$. Also ist f homotop zur konstanten Abbildung $x \mapsto y_0$.

4.5 Es sei X ein wegzusammenhängender Raum und $x_0, x_1 \in X$. Zeige: Genau dann ist die Gruppe $\pi_1(X,x_0)$ abelsch, wenn $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ für alle Wege α, β von x_0 nach x_1 gilt.

Lösung. Wie in der Algebra üblich, lassen wir das Verkettungszeichen $*$ in der Fundamentalgruppe weg, um die Notation zu vereinfachen.

Sei $\pi_1(X,x_0)$ abelsch und seien α, β Wege von x_0 nach x_1. Dann ist $[\beta\overline{\alpha}]$ eine Schleife mit Basispunkt x_0 und bestimmt ein Element von $\pi_1(X,x_0)$. Sei $[f] \in \pi_1(X,x_0)$. Da $\pi_1(X,x_0)$ abelsch ist, gilt $[f\alpha\overline{\beta}] = [\alpha\overline{\beta}f]$ und damit

$$\widehat{\alpha}[f] = [\overline{\alpha}f\alpha] = [\overline{\alpha}(f\alpha\overline{\beta})\beta] = [\overline{\alpha}(\alpha\overline{\beta}f)\beta] = [\overline{\beta}f\beta] = \widehat{\beta}[f].$$

Umgekehrt gelte $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ für alle Wege α, β von x_0 nach x_1. Seien $[f], [g] \in \pi_1(X,x_0)$ und sei α ein Weg von x_0 nach x_1. Dann ist auch $f\alpha$ ein Weg von x_0 nach x_1 und damit $\widehat{\alpha} = \widehat{f\alpha}$. Es folgt

$$\widehat{\alpha}[fg] = \widehat{f\alpha}[fg] = \overline{\alpha}\overline{f}fgf\alpha = \overline{\alpha}gf\alpha = \widehat{\alpha}[gf].$$

Da $\widehat{\alpha}$ injektiv ist, folgt $fg = gf$.

4.9 Zeige, dass die Abbildung $p\colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^2$ eine Überlagerung ist.

Lösung. Es ist klar, dass p als Polynomabbildung stetig ist. Wir verwenden komplexe Polarkoordinaten: Jedes $z \in S^1$ hat eine Darstellung $z = \exp(2\pi\alpha i)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, wobei $\exp(2\pi\alpha i) = \exp(2\pi\alpha' i)$ genau dann, wenn $\alpha - \alpha' \in \mathbb{Z}$. Die beiden Quadratwurzeln von z sind $\exp\big(2\pi(\alpha/2)i\big)$ und $\exp\big(2\pi(\alpha/2+1/2)i\big)$, insbesondere ist p surjektiv. Ist nun $b = \exp(2\pi\beta i)$ ein fester Punkt in S^1, so betrachte

$$U = \big\{\exp(2\pi\alpha i) \mid \alpha \in (\beta - 1/2, \beta + 1/2)\big\}.$$

Die Menge U ist eine Umgebung von b in S^1 und es gilt

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &= V_1 \cup V_2 \\ V_1 &= \big\{\exp(2\pi(\alpha/2)i) \mid \alpha \in (\beta - 1/2, \beta + 1/2)\big\} \\ &= \big\{\exp(2\pi\alpha i) \mid \alpha \in (\beta/2 - 1/4, \beta/2 + 1/4)\big\} \\ V_2 &= \big\{\exp(2\pi(\alpha/2 + 1/2)i) \mid \alpha \in (\beta - 1/2, \beta + 1/2)\big\} \\ &= \big\{\exp(2\pi\alpha i) \mid \alpha \in (\beta/2 - 3/4, \beta/2 - 1/4)\big\} \end{aligned}$$

Die Mengen V_1 und V_2 sind offen in S^1 und disjunkt. Die Einschränkungen $p_i = p|_{V_i}\colon V_i \to U$ für $i = 1, 2$ sind bijektiv und stetig. Die Umkehrabbildungen sind durch $p_1^{-1}(\exp(2\pi\alpha i)) = \exp(2\pi(\alpha/2)i)$ bzw. $p_2^{-1}(\exp(2\pi\alpha i)) = \exp(2\pi(\alpha/2 + 1/2)i)$ für $\alpha \in (\beta - 1/2, \beta + 1/2)$ gegeben und damit ebenfalls stetig. Damit ist alles gezeigt.

4.10 Sei $p\colon E \to B$ eine Überlagerung. Zeige:
(a) Ist $U \subset B$ eine zusammenhängende offene Menge, über der p trivialisiert, dann ist die Zerlegung von $p^{-1}(U)$ in Blätter eindeutig.
(b) Sei B zusammenhängend. Falls $p^{-1}(b_0)$ für ein $b_0 \in B$ aus k Elementen besteht ($k \in \mathbb{N}$), so hat $p^{-1}(b)$ für jedes $b \in B$ genau k Elemente. In diesem Fall heißt p eine *k-fache Überlagerung von B*.

Lösung. (a) Sei U eine solche offene Menge und seien $p^{-1}(U) = \bigcup_\alpha V_\alpha = \bigcup_\beta W_\beta$ Zerlegungen von $p^{-1}(U)$ in disjunkte offene Teilmengen von E derart, dass $p|_{V_\alpha}$ und $p|_{W_\beta}$ für jedes α, β Homöomorphismen mit U sind. Da U zusammenhängend ist, sind auch alle V_α, W_β zusammenhängend. Für jedes α_0 gilt $V_{\alpha_0} = \bigcup_\beta (V_{\alpha_0} \cap W_\beta)$. Es gibt also ein β_0 mit $V_{\alpha_0} \cap W_{\beta_0} \neq \varnothing$. Da V_{α_0} zusammenhängend ist und die W_β disjunkt sind, folgt dann bereits $V_{\alpha_0} = W_{\beta_0}$. Also kommt jedes Element der Familie $\{V_\alpha\}$ auch in der Familie $\{W_\beta\}$ vor. Die Umkehrung geht genauso. Dies zeigt die behauptete Eindeutigkeit.
(b) Betrachte

$$B_j = \big\{b \in B \mid p^{-1}(b) \text{ besteht aus } j \text{ Punkten}\big\}.$$

für $j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wir zeigen, dass jedes B_j sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Da B zusammenhängend ist und $b_0 \in B_k \neq \varnothing$, folgt dann $B = B_k$.
Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von B derart, dass p über jedem Element von $\mathcal{U}$ trivialisiert. Sei $j \in \mathbb{N}$ oder $j = \infty$. Falls $B_j = \varnothing$, so ist B_j offen. Andernfalls wähle $U \in \mathcal{U}$ mit $B_j \cap U \neq \varnothing$ und sei $p^{-1}(U) = \bigcup_\alpha V_\alpha$ die Zerlegung in Blätter. Für jedes $b \in U$ stimmt die Anzahl der Punkte in $p^{-1}(b)$ mit der Anzahl der Blätter V_α überein. Aus $U \cap B_j \neq$

$\varnothing$ folgt also, dass es j Blätter V_α gibt und damit bereits $U \subset B_j$. Dies zeigt, dass B_j die Vereinigung aller $U \in \mathcal{U}$ mit $U \cap B_j \neq \varnothing$ ist. Damit ist B_j offen. Andererseits gilt $B_j = B \setminus \bigcup_{k \neq j} B_k$, also ist B_j auch abgeschlossen. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wenn wir annehmen, dass B wegzusammenhängend ist, dann kann man etwas anschaulicher (aber vielleicht umständlicher) argumentieren. Sei $b_0 \in B$ derart, dass $p^{-1}(b_0)$ aus k Elementen besteht und sei $b_1 \in B$ ein weiterer Punkt. Da B wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg f in B von b_0 nach b_1. Wähle eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von B derart, dass p über jedem $U \in \mathcal{U}$ trivialisiert. Nach dem Lemma von Lebesgue (4.17) gibt es eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ derart, dass jedes Wegstück $f([t_{i-1}, t_i])$, $i = 1, \ldots, n$ in einem Element von $\mathcal{U}$ enthalten ist. Wir zeigen durch Induktion nach i, dass $p^{-1}(f(t_i))$ aus k Elementen ist. Für $i = 0$ ist das die Voraussetzung. Sei $i > 0$, $i \leqslant n$, und $p^{-1}(t_{i-1})$ enthalte k Elemente. Wähle $U \in \mathcal{U}$ mit $f([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ und sei $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$ die Zerlegung in Blätter. Dann ist die Anzahl der Punkte in $p^{-1}(b)$ für jedes $b \in U$ gleich der Anzahl der Blätter V_α. Wegen $f(t_{i-1}) \in U$ ist diese Anzahl k, so dass auch $p^{-1}(f(t_i))$ aus k Elementen besteht.

4.18 Es sei $h\colon S^1 \to S^1$ stetig. Zeige: Ist h nullhomotop, so gibt es Punkte $x, x' \in S^1$ mit $h(x) = x$ und $h(x') = -x'$.

Lösung. Da h nullhomotop ist, setzt h nach Lemma 4.24 zu einer stetigen Abbildung $H\colon B^2 \to S^1$ fort. Diese können wir durch Komposition mit der Inklusion $S^1 \to B^2$ als Abbildung $B^2 \to B^2$ auffassen. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz besitzt H einen Fixpunkt, also $x \in B^2$ mit $H(x) = x$. Aber das Bild von H ist in S^1 enthalten, also muss $x \in S^1$ gelten und damit $h(x) = H(x) = x$.
Für die zweite Behauptung, betrachte $j\colon S^1 \to S^1$, $j(x) = -x$. Die Komposition $j \circ h$ ist stetig und ebenfalls nullhomotop. (Denn ist F eine Homotopie zwischen h und einer konstanten Abbildung, so ist $j \circ F$ eine Homotopie zwischen $j \circ h$ und einer konstanten Abbildung.) Nach dem, was wir schon gezeigt haben, gibt es $x \in S^1$ mit $x = j(h(x)) = -h(x)$, also $h(x) = -x$, wie gewünscht.

4.19 Verwende die Aussage „Für $n \geqslant 1$ gibt es keine Retraktion $B^{n+1} \to S^n$“, um das Folgende zu beweisen.
(a) Die Identität $S^n \to S^n$ ist nicht nullhomotop.
(b) Die Inklusion $S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ ist nicht nullhomotop.
(c) (*Brouwerscher Fixpunktsatz*) Jede stetige Abbildung $B^n \to B^n$ hat einen Fixpunkt.

Lösung. Zunächst bemerken wir, dass ein Teil von Lemma 4.24 in beliebiger Dimension gilt. Ist $h\colon S^n \to X$ eine nullhomotope Abbildung, so gibt es $k\colon B^{n+1} \to X$ mit $k|_{S^n} = h$. Der Beweis geht völlig analog: Sei H eine Homotopie zwischen h und einer konstanten Abbildung und sei $\pi\colon S^n \times I \to B^{n+1}$ die Quotientenabbildung $(x, t) \mapsto (1-t)x$. Sie bildet $S^n \times \{1\}$ auf den Nullpunkt ab und ist im Übrigen injektiv. Da H auf $S^n \times \{1\}$ ebenfalls konstant ist, gibt es $k\colon B^n \to X$ mit $H = k \circ \pi$. Dieses k hat die gewünschte Eigenschaft.
(a) Wäre also die Identität $S^n \to S^n$ nullhomotop, so würde sie zu einer stetigen Abbildung $B^{n+1} \to S^n$ fortsetzen. Dies wäre aber gerade eine Retraktion.

(b) Wäre die Inklusion $S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus 0$ nullhomotop, so gäbe es eine Fortsetzung $k\colon B^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus 0$. Betrachte die Retraktion $r\colon \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus 0 \to S^n$, $x \mapsto x/\|x\|$. Dann wäre $r \circ k\colon B^{n+1} \to S^n$ eine Retraktion, ein Widerspruch.
(c) Mithilfe von (a) und der bewiesenen Hilfsaussage geht der Beweis nun genauso wie im zweidimensionalen Fall:
Angenommen falsch, dann gibt es also eine stetige Abbildung $f\colon B^{n+1} \to B^{n+1}$ mit $f(x) \neq x$ für alle $x \in B^n$. Betrachte die Funktion $v(x) = x - f(x)$, die dann den Wert 0 nicht annimmt. Sei $w\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus 0$ die Einschränkung von v auf den Rand. Betrachte die Homotopie

$$F(x,t) = tx + (1-t)w(x)$$

für $x \in S^1$. Behaupte, dass $F(x,t) \neq 0$ für alle $x \in S^1$ und $t \in [0,1]$ gilt. Für $t = 0$ und $t = 1$ ist das klar. Falls $F(x,t) = 0$ für ein $x \in S^n$ und $t \in (0,1)$, so bedeutet dies $x - f(x) = w(x) = -\frac{t}{1-t}x$, also

$$f(x) = \left(1 + \frac{t}{1-t}\right)x.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $f(x) \in B^{n+1}$. Also ist F eine Homotopie zwischen w und der Identität $S^n \to S^n$ in $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus 0$. Andererseits ist w nullhomotop nach der Vorbemerkung, denn v ist eine stetige Fortsetzung von w auf B^{n+1}. Dies ist ein Widerspruch zu (a).

4.21 Zeige: Ist $g\colon S^2 \to S^2$ stetig mit $g(x) \neq g(-x)$ für alle $x \in S^2$, so ist g surjektiv.
(*Hinweis:* Benutze, dass das Komplement eines Punkts in S^2 zu $\mathbb{R}^2$ homöomorph ist.)

Lösung. Angenommen falsch, dann gibt es einen Punkt $y \in S^2$, der nicht im Bild von g liegt. Wir können dann g als Abbildung $S^2 \to S^2 \smallsetminus \{y\}$ auffassen. Sei $h\colon S^2 \smallsetminus \{y\} \to \mathbb{R}^2$ ein Homöomorphismus. (Konkret ist solches h durch die stereographische Projektion mit Zentrum y gegeben). Wende nun den Satz von Borsuk-Ulam auf $h \circ g\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ an. Es gibt also einen Punkt $x \in S^2$ mit $h(g(x)) = h(g(-x))$. Da h injektiv ist, folgt $g(x) = g(-x)$, ein Widerspruch.

5.1 Es sei $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und sei

$$M = \{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) = 0\}.$$

Zeige: Falls M nicht-leer und der Gradient $(\nabla f)(a)$ für kein $a \in M$ der Nullvektor ist, ist die Menge M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $k-1$ in $\mathbb{R}^k$.
(*Hinweis:* Verwende den Satz über implizite Funktionen, um eine der Koordinaten durch die anderen auszudrücken.)

Lösung. Der Satz über implizite Funktionen besagt: Ist $(\nabla f)(a) \neq 0$ für $a \in M$, etwa $\big(\partial f/\partial x_k\big)(a) \neq 0$, so gibt es eine offene Umgebung U von $(a_1, \dots, a_{k-1})$ in $\mathbb{R}^{k-1}$, eine offene Umgebung V von a_k in $\mathbb{R}$ und eine glatte Abbildung $h\colon U \to V$ mit

$$M \cap (U \times V) = \big\{(x, h(x)) \in U \times V \mid x \in U\big\}.$$

Dann ist $g\colon U \to M$, $x \mapsto (x, h(x))$ eine Karte mit glatter Umkehrfunktion $g^{-1}\colon y \mapsto (y_1, \ldots, y_{k-1})$. Durch Variation des Punktes $a \in M$ erhält man einen Atlas auf M.

5.7 Es sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine m-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeige:

(a) Das Innere von M ist eine m-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit (ohne Rand).

(b) Der Rand ∂M ist entweder leer oder eine $m-1$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit (ohne Rand).

Lösung. Sei $x \in M$ und sei $h\colon U \to M$ ein Diffeomorphismus zwischen einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{H}^m$ und einer offenen Teilmenge $h(U) \subset M$ mit $x \in h(U)$.
(a) Ist x ein innerer Punkt, so liegt $h^{-1}(x)$ per Definition in $(\mathbb{H}^m)^\circ = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m > 0\}$. Die Einschränkung von h auf $V = U \cap (\mathbb{H}^m)^\circ$ ist deshalb ein Diffeomorphismus von der offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ auf die offene Teilmenge $h(V) \subset M$ mit $x \in h(V)$. Dies zeigt, dass das Innere von M eine m-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit ist.
(b) Ist $x \in \partial M$ ein Randpunkt, so bedeutet dies, dass $h^{-1}(x)$ in $\partial\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m = 0\}$ liegt. Dabei ist $\partial\mathbb{H}^m$ unter der Projektion $x \mapsto (x_1, \ldots, x_{m-1})$ diffeomorph zu $\mathbb{R}^{m-1}$ und $U \cap \partial\mathbb{H}^m$ eine offene Teilmenge von $\partial\mathbb{H}^m$. Die Einschränkung von h auf $V = U \cap \partial\mathbb{H}^m$ ist deshalb ein Diffeomorphismus von der offenen Teilmenge $V \subset \partial\mathbb{H}^m \cong \mathbb{R}^{m-1}$ auf die in ∂M offene Teilmenge $h(V)$ mit $x \in h(V)$. Dies zeigt, dass ∂M eine $(m-1)$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit ist.

5.8 Sei $X \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist X diffeomorph zu einem der drei Intervalle $(0,1)$, $(0,1]$ oder $[0,1]$.

Lösung. Ist $X = [a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, so ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{b-a}(x-a)$ ein Diffeomorphismus von $[a,b]$ auf $[0,1]$. Die Einschränkung auf $(a,b]$ bzw. (a,b) ist ein Diffeomorphismus auf $(0,1]$ bzw. $(0,1)$. Ferner ist die Abbildung $h(x) = -x$ ein Diffeomorphismus von $[a,b)$ auf $(-b,-a]$, so dass $[a,b)$ ebenfalls diffeomorph zu $(0,1]$ ist.
Es bleibt der Fall, dass X ein unbeschränktes Intervall ist. Für $X = \mathbb{R}$ ist die Tangens-Funktion ein Diffeomorphimus $(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, mit der glatten Umkehrfunktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Da $(-\pi/2, \pi/2)$ diffeomorph zu $(0,1)$, ist also auch $\mathbb{R}$ diffeomorph zu $(0,1)$. Entsprechend ist die Einschränkung des Tangens auf $[0, \pi/2)$ ein Diffeomorphismus auf $[0, \infty)$ und die Einschränkung auf $(0, \pi/2)$ ein Diffeomorphismus auf $(0, \infty)$. Durch Translation und Komposition mit der Spiegelung h sieht man, dass jedes unbeschränkte Intervall zu $(0,1)$ oder $(0,1]$ diffeomorph ist.