

TOPOLOGIE

Skript zur Vorlesung
Universität Konstanz, Wintersemester 2014/15

Daniel Plaumann

Inhalt

Vorwort	5
Literatur	5
1. Grundlagen	7
1.1. Metrische Räume	7
1.2. Topologische Räume	10
1.3. Abschluss und Inneres	13
1.4. Basen und Erzeugung von Topologien	15
1.5. Die Produkttopologie für zwei Räume	18
1.6. Teilräume	19
1.7. Hausdorff-Räume	20
1.8. Stetige Abbildungen	22
2. Zusammenhang und Kompaktheit	25
2.1. Zusammenhang und Wegzusammenhang	25
2.2. Zusammenhangskomponenten und lokaler Zusammenhang	29
2.3. Kompaktheit	31
2.4. Die Produkttopologie	33
2.5. Beweis des Satzes von Tychonoff	35
3. Quotienten	39
3.1. Initial- und Finaltopologie	39
3.2. Quotienten	40
4. Fundamentalgruppe und Überlagerungen	47
4.1. Homotopien	47
4.2. Die Fundamentalgruppe	52
4.3. Überlagerungen	56
4.4. Lifts und die Fundamentalgruppe des Kreises	60
4.5. Retraktionen und Fixpunkte	66
4.6. Der Fundamentalsatz der Algebra	69
4.7. Der Satz von Borsuk-Ulam in Dimension 2	70
5. Mannigfaltigkeiten und analytische Methoden	75
5.1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	75
5.2. Klassifikation eindimensionaler Mannigfaltigkeiten	81
5.3. Retraktionen und der Brouwersche Fixpunktsatz	84
5.4. Der Satz von Sard	86

VORWORT

Dieses Skript beruht auf einer zweistündigen Vorlesung, die im Wintersemester 2014/15 an der Universität Konstanz gehalten wurde. Nähere Informationen zur Veranstaltung finden sich auf meiner Homepage.

math.uni-konstanz.de/~plaumann/Topologie14.html

Ein Skript ist kein Lehrbuch:

- Es wird kein Anspruch auf Originalität erhoben. Vor allem aus den unten genannten Büchern von Milnor und Munkres werde ich munter abschreiben, ohne dass dies im Einzelnen kenntlich gemacht wird.
- Erläuterungen und Zwischentexte sowie Zeichnungen fehlen oft.
- Es gibt noch mehr Fehler aller Art als in den meisten Lehrbüchern.

LITERATUR

Hauptquellen

[Mu] J. R. Munkres. **Topology: a first course**. Zweite Auflage, Prentice Hall, 2000.

[Mi] J. W. Milnor. **Topology from the differentiable viewpoint**. Univ. Press of Virginia, 1965. (Nachdruck in Princeton Landmarks in Mathematics, 1997)

Die Vorlesung orientiert sich zunächst vor allem an Munkres, später an Milnor.

Deutschsprachige Bücher

[Jä] K. Jänich. **Topologie**. Achte Auflage, Springer-Verlag, 2005.

[BJ] T. Bröcker und K. Jänich. **Einführung in die Differentialtopologie**. Springer-Verlag, 1973.

Das erste Buch kann als Alternative zu Munkres herangezogen werden. Das zweite ist recht anspruchsvoll und taugt nur bedingt als Ersatz für Milnor.

Nachschlagewerke

[Bo] N. Bourbaki. **Éléments de mathématique: Topologie générale**. Hermann, 1971. (Ins Englische übersetzt als „General Topology“ bei Springer.)

[En] R. Engelking. **General Topology**. Zweite Auflage (übersetzt aus dem Polnischen), Heldermann, 1989.

Beide Bücher sind eher enzyklopädisch. Das erste ist allerdings sehr berühmt, genauso wie die Geschichte seines Autors.

1. GRUNDLAGEN

MENGEN

Es seien X, Y zwei Mengen. Wir schreiben $Y \subset X$, wenn jedes Element von Y ein Element von X ist. Dabei ist Gleichheit erlaubt. (Die Notation $Y \subseteq X$ wird nicht verwendet). Soll die Gleichheit ausgeschlossen sein, dann schreiben wir $Y \subsetneq X$. (Nicht zu verwechseln mit $Y \not\subset X$, was bedeutet, dass Y keine Teilmenge von X ist.)

Wir schreiben $\mathcal{P}(X)$ für die **Potenzmenge von X** , die Menge aller Teilmengen von X . Sie ist also eine Menge von Mengen. Ist X eine endliche Menge mit n Elementen, dann ist $\mathcal{P}(X)$ eine Menge mit 2^n Elementen. Beachte, dass immer $\emptyset, X \in \mathcal{P}(X)$ gilt. Für Mengen von Mengen verwenden wir häufig Skriptbuchstaben. Ist \mathcal{Y} eine Menge von Mengen, so ist $\bigcup \mathcal{Y}$ die Vereinigung aller Mengen in \mathcal{Y} . Die Notation $\bigcup \mathcal{Y}$ kann man umständlicher, aber vielleicht weniger ungewohnt, durch $\bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y$ ersetzen. Ist $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ endlich, so schreiben wir natürlich auch $Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ statt $\bigcup \mathcal{Y}$, wie gewohnt¹. Völlig analog verfahren wir mit Durchschnitten.

1.1. METRISCHE RÄUME

Das Konzept einer Metrik entsteht durch Abstraktion aus dem Abstandsbegriff der euklidischen Geometrie, der sich in der linearen Algebra in der Norm auf dem Vektorraum \mathbb{R}^n wiederfindet. Metrische Räume sind systematische und historische Vorläufer der topologischen Räume, die wir im nächsten Abschnitt einführen.

Es sei X eine Menge. Eine **Metrik auf X** ist eine Abbildung

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

die für alle $x, y, z \in X$ den folgenden Bedingungen genügt.

- (1) $d(x, y) \geq 0$
- (2) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$
- (3) $d(x, y) = d(y, x)$
- (4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

¹Das Aufzählen endlich vieler Mengen weckt bei manchen Menschen ein Bedürfnis nach Indizierung auch für unendliche Vereinigungen, etwa so: „Sei I eine (beliebige) Indexmenge und $\{X_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Mengen und $\bigcup_{i \in I} X_i$ ihre Vereinigung.“ Hin und wieder ist das ganz praktisch, es sollte aber nicht zu einer sinnlosen Angewohnheit werden.

In einem metrischen Raum (X, d) definiert man die **offenen Teilmengen** von X genauso wie im euklidischen Raum: Wir schreiben

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

für jedes $x \in X$ und jede positive reelle Zahl ε und nennen $B_d(x, \varepsilon)$ die **offene Kugel mit Radius ε um x** oder eine **ε -Umgebung von x** , bezüglich der Metrik d .

Eine Teilmenge U von X heißt **offen** (bezüglich der Metrik d), wenn zu jedem $x \in U$ eine positive reelle Zahl ε derart existiert, dass $B_d(x, \varepsilon) \subset U$ gilt. Eine Teilmenge A von X heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Beispiele 1.1. (1) Auf \mathbb{R}^n ist der **euklidische Abstand** eine Metrik, gegeben durch

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Die offenen Kugeln in dieser Metrik sind Kugeln im üblichen Sinn.

(2) Allgemeiner bekommt man aus jeder Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen Vektorraum eine Metrik, gegeben durch

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^n kommt von der Standardnorm $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Für jede reelle Zahl $p \geq 1$ ist auch

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

eine Norm, genannt die **p -Norm**, und induziert damit eine Metrik. (Ist dagegen $p < 1$, so ist die Dreiecksungleichung verletzt.)

(3) Sehr wichtig für die Analysis sind die analogen Normen auf Funktionenräumen. Sei etwa X eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^n und $V = C^0(X, \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf X . Dann ist für jedes $p \geq 1$ durch

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_{x \in X} |f(x)|^p dx}$$

für $f \in V$ eine Norm gegeben, die **p -Norm** auf V bezüglich X . In der Funktionalanalysis beschränkt man sich nicht auf stetige Funktionen auf Kompakta, was auf die sogenannten L^p -Räume führt.

(4) Wichtig in der Zahlentheorie ist folgende Metrik. Sei p eine Primzahl. Jede rationale Zahl x besitzt eine bis auf Vorzeichen eindeutige Darstellung $x = p^k \cdot (a/b)$ mit ganzen Zahlen a, b, k , wobei a, b teilerfremd und nicht durch p teilbar. Setze

$$|x|_p = p^{-k}$$

und nenne $|\cdot|_p$ den **p -adischen Absolutbetrag** auf \mathbb{Q} . Durch

$$d_p(x, y) = |x - y|_p$$

ist dann auf \mathbb{Q} eine Metrik gegeben, die **p -adische Metrik**.

Diese Metrik verhält sich vollkommen anders als der übliche Abstand $|x - y|$ auf \mathbb{Q} ; zum Beispiel sind große Potenzen von p nahe bei 0.

Übung 1.1. Zeige, dass die p -adische Metrik auf \mathbb{Q} die Axiome einer Metrik erfüllt und dass sogar die folgende verschärfte Version der Dreiecksungleichung gilt: Für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gilt

$$d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(z, y)\},$$

die **ultrametrische Ungleichung**.

Proposition 1.2. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gelten:

- (1) \emptyset und X sind offen.
- (2) Ist \mathcal{U} eine Menge von offenen Teilmengen von X , so ist auch $\bigcup \mathcal{U}$ offen.
- (3) Sind U und V offene Teilmengen von X , so auch $U \cap V$.

Beweis. (1) ist klar aus der Definition. (Beachte allerdings die Logik im Hinblick auf die leere Menge: Sei $U = \emptyset$. Die Aussage „Zu jedem $x \in U$ existiert $\varepsilon > 0$ derart, dass ...“ ist dann automatisch wahr, da es gar kein Element $x \in U$ gibt, wofür etwas erfüllt sein müsste.)

(2) Es sei \mathcal{U} eine Menge von offenen Teilmengen von X . Ist dann $x \in \bigcup \mathcal{U}$, so gibt es $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Da U offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_d(x, \varepsilon) \subset U$, und wegen $U \subset \bigcup \mathcal{U}$ ist $\bigcup \mathcal{U}$ damit offen.

(3) Ist $x \in U \cap V$, so gibt es $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit $B_d(x, \varepsilon_1) \subset U$ und $B_d(x, \varepsilon_2) \subset V$. Es sei $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, dann gilt $B_d(x, \varepsilon) \subset U \cap V$. Also ist $U \cap V$ offen. \square

In der Analysis beweist man, dass **alle Normen auf \mathbb{R}^n äquivalent sind**. Damit ist folgendes gemeint: Für jede Wahl reeller Zahlen p und r mit $1 \leq p \leq r \leq \infty$ gilt

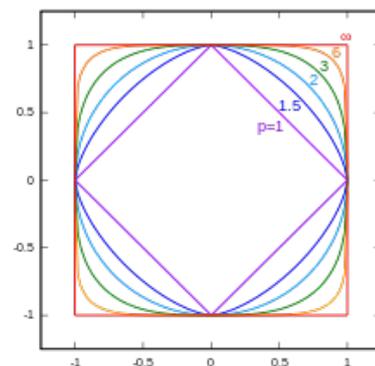
$$\|x\|_r \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \|x\|_r.$$

(Für $r = \infty$ ist dabei $1/\infty = 0$.) Das beweist man mithilfe der Hölder-Ungleichung.

Proposition 1.3. Eine Teilmenge von \mathbb{R}^n ist genau dann offen bezüglich einer p -Norm (mit $1 \leq p \leq \infty$), wenn sie bezüglich jeder p -Norm offen ist.

Beweis. Es sei $1 \leq p \leq r \leq \infty$ und sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen in der r -Norm. Zu einem Punkt $x \in U$ existiert dann $\varepsilon > 0$ mit $B_r(x, \varepsilon) \subset U$, wobei B_r die offene Kugel bezüglich der r -Norm bezeichnet. Nach der obigen Ungleichung gilt $B_p(x, m\varepsilon) \subset B_r(x, \varepsilon)$ mit $m = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \in U$. Also ist U auch offen in der p -Norm. Die Umkehrung geht genauso (nur ohne die Skalierungskonstante). \square

Diese Aussage zeigt, dass der Begriff der offenen Teilmenge zwar mithilfe einer Norm definiert wird, aber nicht von der gewählten Norm abhängt — er ist nicht *metrisch*, sondern *topologisch*.



Einheitskreise in \mathbb{R}^2 für verschiedene p -Normen. (Bildquelle: Wikimedia)

1.2. TOPOLOGISCHE RÄUME

Die Definition eines topologischen Raums wirkt erst einmal ziemlich asketisch.

Es sei X eine Menge. Eine **Topologie auf X** ist eine Menge \mathcal{T} von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften.

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- (2) Für alle $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ gilt $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$. (Vereinigungen)
- (3) Für alle $U, V \in \mathcal{T}$ gilt $U \cap V \in \mathcal{T}$. (Endliche Durchschnitte)

Die Menge X zusammen mit der Topologie \mathcal{T} heißt ein **topologischer Raum**. Die Elemente von \mathcal{T} heißen die **offenen Mengen in X bezüglich \mathcal{T}** . Eine Menge A heißt **abgeschlossen in X bezüglich \mathcal{T}** , wenn $X \setminus A$ offen ist.

Es ist üblich, die Topologie \mathcal{T} in der Notation zu unterschlagen und nur von offenen oder abgeschlossenen Mengen in einem topologischen Raum zu reden (bei fixierter Topologie). Die Axiome (1)–(3) kann man dann verbal so ausdrücken:

- (1') Die leere Menge und der ganze Raum sind offen.
- (2') Die Vereinigung offener Mengen ist offen.
- (3') Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Bemerkung. Axiom (3) ist nach dem Induktionsprinzip äquivalent zur Aussage: Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und alle $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$ gilt $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$. So ist es auch in (3') formuliert. Dagegen kann man die Aussage für beliebige Vereinigungen (also auch Vereinigungen von unendlich vielen Mengen) in (2) nicht aus der entsprechenden Aussage für nur zwei Elemente von \mathcal{T} folgern.

Beispiele 1.4. (1) Die offenen Mengen in einem metrischen Raum erfüllen die Axiome einer Topologie (Prop. 1.2). Jeder metrische Raum ist also auch ein topologischer. Man sagt, die Metrik **induziert** die Topologie. Umgekehrt lässt sich die Metrik aber nicht aus der Topologie rekonstruieren: Zwei verschiedene Metriken können durchaus dieselbe Topologie induzieren, so wie in Prop. 1.3.

(2) Insbesondere ist also \mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik ein topologischer Raum. Die zugehörige Topologie ist die **euklidische Topologie**.

(3) In den reellen Zahlen sind die offenen Intervalle $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (für $-\infty \leq a < b \leq \infty$) offen in der euklidischen Topologie und die abgeschlossenen Intervalle $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (für $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$) abgeschlossen, wie es sich gehört. Aus der Definition weniger offensichtlich ist, welche offenen und abgeschlossenen Teilmengen es sonst noch so gibt. Tatsächlich ist jede offene Menge in \mathbb{R} eine abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen (siehe auch [Mu, §30]).

(4) Auf reellen und komplexen Vektorräumen hat man eine Hierarchie von Begriffen, jeder allgemeiner als der vorige:

Prähilbertraum		Normierter Raum		Metrischer Raum		Topologischer Raum
Skalarprodukt	\rightsquigarrow	Norm	\rightsquigarrow	Metrik	\rightsquigarrow	Topologie
$\langle -, - \rangle$		$\ \cdot \ = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$		$d(x, y) = \ x - y\ $		offene Mengen

Richtig interessant ist diese Hierarchie nur für unendlich-dimensionale Räume, ein zentrales Thema der Funktionalanalysis.

Keiner dieser Schritte ist trivial: Nicht jede Norm kommt vom einem Skalarprodukt, nicht jede Metrik von einer Norm, nicht jede Topologie von einer Metrik. Und falls doch, so ist das betreffende Objekt im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

(5) Auf jeder Menge X lassen sich zwei Topologien ohne weiteres definieren: In der Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ ist *jede* Teilmenge von X offen. Sie wird die **diskrete Topologie** genannt. Dagegen ist auch $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ offensichtlich eine Topologie. In ihr sind also nur die leere Menge und der ganze Raum offen. Diese Topologie wird die **indiskrete Topologie** genannt.

(6) Sinnvoll für jede beliebige Menge X ist auch die **co-endliche Topologie**. In ihr ist eine Teilmenge $U \subset X$ genau dann offen, wenn $X \setminus U$ endlich ist oder $U = \emptyset$. (Überprüfe, dass es sich um eine Topologie handelt.) Ist X endlich, so stimmt die co-endliche mit der diskreten Topologie überein.

(7) Es sei $X = \{a, b\}$ eine Menge mit zwei Elementen. Die Menge $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ ist eine Topologie auf X . Dieser topologische Raum wird **Sierpiński-Raum** genannt. Trotz seiner Einfachheit ist er ziemlich wichtig. Er ist auch ein Beispiel für einen topologischen Raum, der kein metrischer Raum ist.

(8) Es sei X eine endliche Menge mit n Elementen. Wieviele verschiedene Topologien gibt es auf X ? Eine Topologie \mathcal{T} ist eine Teilmenge der Potenzmenge von X , also ein Element von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Diese Menge hat 2^{2^n} Elemente. Da \emptyset und X in jeder Topologie enthalten sein müssen, kommen nach Berücksichtigung dieses Axioms noch 2^{2^n-2} Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$ als Topologien in Frage. Die genaue Zahl ist nur für kleine Werte von n bekannt (siehe etwa den Wikipedia-Eintrag 'Finite topological spaces' sowie Übung 1.5).

Übung 1.2. Gib ein Beispiel für eine unendliche Menge von offenen Intervallen in \mathbb{R} , deren Durchschnitt nicht offen ist. Gib ebenso ein Beispiel einer unendlichen Menge von abgeschlossenen Intervallen, deren Vereinigung nicht abgeschlossen ist.

Übung 1.3. Es sei $X = \{a, b\}$. Zeige, dass es keine Metrik auf X gibt, die die Sierpiński-Topologie induziert.

Übung 1.4. Es sei X eine Menge. Gibt es eine Metrik auf X , die

- (a) die diskrete Topologie
 - (b) die indiskrete Topologie
- auf X induziert?

Übung 1.5. Sei X eine Menge mit zwei Elementen. Bestimme alle möglichen Topologien auf X . Wie sieht es mit dreielementigen Mengen aus?

Ist \mathcal{T} eine Topologie auf einer Menge X , so ist $\mathcal{A} = \{A \subset X \mid X \setminus A \in \mathcal{T}\}$ die Menge der abgeschlossenen Mengen in X , und \mathcal{T} ist durch \mathcal{A} eindeutig bestimmt. Man kann eine Topologie also ebenso gut über ihre abgeschlossenen Mengen definieren. Aus den Mengengesetzen zur Komplementbildung sieht man, dass die abgeschlossenen Mengen in einem topologischen Raum folgende Eigenschaften haben:

- (1'') Die leere Menge und der ganze Raum sind abgeschlossen.
 (2'') Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
 (3'') Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Übung 1.6. Verifiziere, dass (1'')–(3'') in jedem topologischen Raum gelten.

Beispiel 1.5. (1) In der co-endlichen Topologie auf einer Menge X sind die abgeschlossenen Teilmengen genau die endlichen Teilmengen und X .

(2) In der diskreten Topologie auf einer Menge X ist jede Teilmenge offen und deswegen auch jede Teilmenge abgeschlossen. Insbesondere sieht man, dass eine Menge sowohl offen als auch abgeschlossen sein kann.

„How is a set different from a door? A door must be either open or closed, and cannot be both, while a set can be open, or closed, or both, or neither!“ (Munkres)

Übung 1.7. Versuche, diesen Witz ins Deutsche zu übersetzen.

1.3. ABSCHLUSS UND INNERES

Im folgenden sei immer X ein topologischer Raum.

Es sei $Y \subset X$ eine Teilmenge. Eine **Umgebung von Y in X** ist eine offene Teilmenge U von X , die Y enthält.

Besonders wichtig sind die Umgebungen von Punkten, also die Umgebungen von einelementigen Mengen $Y = \{x\}$, $x \in X$.

Warnung. Wir folgen hier der Terminologie von Munkres. Sehr verbreitet ist aber auch eine etwas allgemeinere Definition, in der jede (nicht notwendig offene) Obermenge einer Umgebung auch Umgebung genannt wird. Was wir Umgebung nennen, heißt dann „offene Umgebung“.

Es sei Y eine Teilmenge von X . Die Vereinigung aller in Y enthaltenen offenen Teilmengen ist offen und wird das **Innere von Y** genannt und mit Y° (oder $\text{int}(Y)$) bezeichnet. Die Elemente von Y° sind die **inneren Punkte von Y** . Das Innere ist die (bezüglich Inklusion) maximale offene Teilmenge von Y .

Ferner ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen, die Y enthalten, abgeschlossen und wird der **Abschluss von Y** genannt und mit \bar{Y} (oder $\text{clos}(Y)$) bezeichnet. Der Abschluss ist die minimale abgeschlossene Obermenge von Y .

Wir sagen, eine Teilmenge Z von X **schneidet** Y , wenn $Y \cap Z \neq \emptyset$ gilt.

Proposition 1.6. *Es sei Y eine Teilmenge von X .*

- (1) *Ein Punkt von X liegt genau dann im Inneren von Y , wenn er eine Umgebung besitzt, die in Y enthalten ist.*
- (2) *Ein Punkt von X liegt genau dann im Abschluss von Y , wenn jede seiner Umgebungen Y schneidet.*

Beweis. (1) Ist $x \in Y^\circ$, so ist Y° eine Umgebung von x , die in Y enthalten ist. Ist umgekehrt x ein Punkt mit einer Umgebung $U \subset Y$, so gilt $U \subset Y^\circ$ nach Definition des Inneren, also $x \in Y^\circ$.

(2) Wir zeigen für beide Implikationen die logische Umkehrung: Sei $x \in X$ ein Punkt mit einer Umgebung U , die Y nicht schneidet. Dann ist $X \setminus U$ eine abgeschlossene Menge, die Y enthält, aber nicht x . Nach Definition des Abschlusses gilt $\overline{Y} \subset (X \setminus U)$, also $x \notin \overline{Y}$. Ist umgekehrt x nicht in \overline{Y} enthalten, so ist $X \setminus \overline{Y}$ eine offene Umgebung von x , die Y nicht schneidet. \square

Beispiel 1.7. Sei $X = \mathbb{R}$ die reelle Gerade mit der euklidischen Topologie und Y das halboffene Intervall $(0, 1]$. Dann ist $(0, 1)$ das Innere von Y und $[0, 1]$ der Abschluss.

Übung 1.8. Zeige an einem Beispiel, dass es keine maximale abgeschlossene Teilmenge $A \subset Y$ und keine minimale offene Teilmenge $Y \subset U$ zu geben braucht.

Der **Rand** einer Teilmenge Y von X ist die Menge $\overline{Y} \setminus Y^\circ$ und wird mit ∂Y bezeichnet. Die Elemente des Randes heißen **Randpunkte** von Y .

Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** von Y , wenn jede Umgebung von x einen Punkt aus $Y \setminus \{x\}$ enthält. Ein Punkt von Y , der kein Häufungspunkt von Y ist, heißt **isoliert**. Per Definition ist jeder Häufungspunkt im Abschluss enthalten, und jeder isolierte Punkt ein Randpunkt.

Beispiele 1.8. Es sei wieder $X = \mathbb{R}$.

(1) Sei $Y = (0, 1]$. Dann gilt $\partial Y = \{0, 1\}$ und die Häufungspunkte von Y bilden das Intervall $[0, 1]$.

(2) Ist $Y = \{0\} \cup (1, 2]$, so bilden die Häufungspunkte gerade das Intervall $[1, 2]$, während $\{0\}$ ein isolierter Punkt von Y ist. Es ist $\partial Y = \{0, 1, 2\}$.

(3) Jeder Punkt von \mathbb{R} ist ein Häufungspunkt der Teilmenge \mathbb{Q} . Die Teilmenge \mathbb{Z} hat dagegen keine Häufungspunkte in \mathbb{R} .

(4) Es sei $Y = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist 0 der einzige Häufungspunkt von Y und es gilt $\overline{Y} = Y \cup \{0\}$.

Die Aussage im letzten Beispiel verallgemeinert sich folgendermaßen.

Lemma 1.9. *Es sei Y eine Teilmenge von X und sei Y' die Menge aller Häufungspunkte von Y . Dann gilt*

$$\overline{Y} = Y \cup Y'$$

Beweis. Die Inklusion $Y \cup Y' \subset \overline{Y}$ ist klar. Sei umgekehrt $x \in \overline{Y}$. Wir müssen zeigen: Falls $x \notin Y$, dann ist x ein Häufungspunkt von Y . Sei U eine Umgebung von x . Da $x \in \overline{Y}$, gilt $U \cap Y \neq \emptyset$. Andererseits ist $x \notin Y$, also muss $U \cap Y$ einen von x verschiedenen Punkt von Y enthalten. Damit ist x ein Häufungspunkt von Y . \square

Korollar 1.10. *Eine Teilmenge eines topologischen Raumes ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.* \square

Übung 1.9. Zeige $\overline{Y} = X \setminus \text{int}(X \setminus Y)$.

Übung 1.10. Es sei X ein topologischer Raum. Zeige:

- (a) Für zwei Teilmengen $M, N \subset X$ gilt $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.
 (b) Es sei \mathcal{M} eine Menge von Teilmengen von X . Beweise die Inklusion

$$\bigcup_{M \in \mathcal{M}} \overline{M} \subset \overline{\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M}.$$

- (c) Was stimmt nicht mit dem folgenden 'Beweis' für die umgekehrte Inklusion in (b)?
 „Ist $x \in \overline{\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M}$, so schneidet jede Umgebung von x die Vereinigung $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$. Also gibt es $M \in \mathcal{M}$ mit $U \cap M \neq \emptyset$. Also gilt $x \in \overline{M}$ und damit $x \in \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \overline{M}$. q.e.d.“
 (d) Gib ein Beispiel, in dem die umgekehrte Inklusion in (b) nicht gilt.

Übung 1.11. Es sei X ein topologischer Raum, $M, N \subset X$, \mathcal{M} eine Menge von Teilmengen von X . Entscheide jeweils, ob die folgenden Gleichheiten allgemein gelten oder, falls nicht, welche Inklusionen.

- (a) $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cap \overline{N}$
 (b) $\overline{\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M} = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \overline{M}$
 (c) $\overline{M \setminus N} = \overline{M} \setminus \overline{N}$.

1.4. BASEN UND ERZEUGUNG VON TOPOLOGIEN

Häufig möchte man eine Topologie spezifizieren, in der bestimmte Mengen offen sein sollen, ohne die ganze Topologie explizit angeben zu müssen. Der Begriff einer Basis ist in diesem Zusammenhang nützlich (aber längst nicht so nützlich oder so wichtig wie sein Pendant in der linearen Algebra).

Es sei stets X eine Menge. Eine (**topologische**) **Basis auf X** ist eine Menge \mathcal{B} von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Jeder Punkt $x \in X$ ist in mindestens einer Menge aus \mathcal{B} enthalten. (Mit anderen Worten, es gilt $\bigcup \mathcal{B} = X$).
- (2) Ist ein Punkt $x \in X$ in zwei Mengen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ enthalten, dann gibt es $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3$ und $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Die Elemente von \mathcal{B} heißen die **Basismengen** (bezüglich \mathcal{B}).

Proposition 1.11. *Es sei \mathcal{B} eine topologische Basis auf X und sei \mathcal{T} die Menge aller Teilmengen U von X mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem Punkt $x \in U$ gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$ und $B \subset U$.*

- (1) *Die Menge \mathcal{T} von Teilmengen von X ist eine Topologie, in der alle Basismengen offen sind.*
- (2) *Die offenen Teilmengen bezüglich \mathcal{T} sind genau die Vereinigungen von Basismengen.*

Die Topologie \mathcal{T} ist die **von \mathcal{B} erzeugte Topologie** auf X und \mathcal{B} eine **Basis von \mathcal{T}** .

Beweis. (1) Es gilt $\emptyset \in \mathcal{T}$ nach Definition und $X \in \mathcal{T}$ nach dem ersten Axiom einer Basis. Es sei weiter $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, dann müssen wir $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$ zeigen. Ist $x \in \bigcup \mathcal{U}$, dann gibt es $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Da U in \mathcal{T} liegt, gibt es dann $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset U$. Dann aber auch $x \in B \subset \bigcup \mathcal{U}$, also ist $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$.

Seien nun $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ und sei $x \in U_1 \cap U_2$. Wähle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_i \subset U_i$ ($i = 1, 2$). Nach dem zweiten Axiom einer Basis folgt aus $x \in B_1 \cap B_2$ dann die Existenz von $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3$ und $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Es gilt damit $x \in B_3 \subset U_1 \cap U_2$, also $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Dass \mathcal{B} in \mathcal{T} enthalten ist, ist klar aus der Definition von \mathcal{T} .

(2) Da $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ gilt und \mathcal{T} unter Vereinigungen abgeschlossen ist, sind Vereinigungen von Basismengen sicher offen in \mathcal{T} . Ist umgekehrt U offen, so wähle zu jedem $x \in U$ ein $B_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_x \subset U$. Dann folgt $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, so dass U eine Vereinigung von Basismengen ist. \square

Lemma 1.12. *Es sei X ein topologischer Raum und sei \mathcal{C} eine Menge von offenen Teilmengen von X mit der folgenden Eigenschaft: Zu jeder offenen Menge U und jedem Punkt $x \in U$ gibt es $C \in \mathcal{C}$ mit $x \in C \subset U$. Dann ist \mathcal{C} eine Basis der Topologie von X .*

Beweis. Zeige zunächst, dass \mathcal{C} eine Basis ist. Da X selbst offen ist, gibt es zu jedem $x \in X$ ein $C \in \mathcal{C}$ mit $x \in C$. Für das zweite Axiom seien $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ und $x \in C_1 \cap C_2$. Da C_1 und C_2 offen sind, ist auch $C_1 \cap C_2$ offen und so gibt es nach Voraussetzung $C_3 \in \mathcal{C}$ mit $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$.

Sei \mathcal{T} die Topologie von X und \mathcal{T}' die von \mathcal{C} erzeugte Topologie. Wir müssen $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ zeigen. Da \mathcal{C} aus Elementen von \mathcal{T} besteht, gilt $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Ist umgekehrt $U \in \mathcal{T}$ und $x \in U$, dann gibt es nach Voraussetzung $C \in \mathcal{C}$ mit $x \in C \subset U$. Also $U \in \mathcal{T}'$. \square

Im Beweis haben wir erstmals zwei Topologien auf dem gleichen Raum verglichen. Sind \mathcal{T} und \mathcal{T}' zwei Topologien auf X , so heißt \mathcal{T}' **feiner** als \mathcal{T} und \mathcal{T} heißt **größer** als \mathcal{T}' , wenn $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ gilt, wenn also jede bezüglich \mathcal{T} offene Menge auch bezüglich \mathcal{T}' offen ist.

Gilt $\mathcal{T} \not\subset \mathcal{T}'$ so sagen wir, \mathcal{T}' ist **strikt feiner** als \mathcal{T} und \mathcal{T} ist **strikt größer** als \mathcal{T}' . Ist keine der beiden Topologien feiner als die andere, so sagen wir, die Topologien sind **nicht vergleichbar**.

Übung 1.12. Es sei $X = \{a, b, c\}$. Betrachte die beiden Topologien

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$$

auf X . Finde die größte Topologie auf X , die feiner als \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 ist und die feinste Topologie, die größer als \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 ist.

Lemma 1.13. *Es seien \mathcal{B} bzw. \mathcal{B}' zwei Basen von Topologien \mathcal{T} bzw. \mathcal{T}' auf X . Äquivalent sind:*

- (1) \mathcal{T}' ist feiner als \mathcal{T} .
- (2) Zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Basismenge $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$ gibt es $B' \in \mathcal{B}'$ mit $x \in B' \subset B$.

Beweis. (1) \implies (2) Gegeben $x \in X$ und $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$. Dann ist B offen in \mathcal{T} und damit auch in \mathcal{T}' . Da \mathcal{T}' von \mathcal{B}' erzeugt wird, gibt es also $B' \in \mathcal{B}'$ mit $x \in B' \subset B$.

(2) \implies (1) Sei $U \in \mathcal{T}$ und $x \in U$. Da \mathcal{T} von \mathcal{B} erzeugt wird, gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset U$. Nach (2) gibt es $B' \in \mathcal{B}'$ mit $x \in B' \subset B \subset U$. Also folgt $U \in \mathcal{T}'$. Damit ist \mathcal{T}' feiner als \mathcal{T} . □

Beispiele 1.14. (1) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge \mathcal{B} aller offenen Kugeln in X eine Basis für die durch d induzierte Topologie, denn genau so haben wir die durch d induzierte Topologie definiert.

(2) Insbesondere bilden die offenen Intervalle $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ eine Basis für die euklidische Topologie auf \mathbb{R} . Eine andere Topologie auf \mathbb{R} erhält man durch die Basis der halboffenen Intervalle

$$\mathcal{B}' = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

In dieser Topologie sind die 'halboffenen' Intervalle also offen! Die reelle Gerade mit dieser Topologie wird **Sorgenfrey-Gerade** genannt (nach dem amerikanischen Mathematiker R. H. Sorgenfrey) und mit \mathbb{R}_S bezeichnet. Wir werden noch mehrfach auf dieses Beispiel zurückkommen.

(3) Es sei \mathcal{B} wie in (2) und sei $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Setze

$$\mathcal{B}'' = \mathcal{B} \cup \{(a, b) \setminus K \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Dann ist \mathcal{B}'' eine topologische Basis und die von ihr erzeugte Topologie wird die **K-Topologie** genannt.

Übung 1.13. Überprüfe, dass die Mengen von Teilmengen \mathcal{B}' und \mathcal{B}'' von \mathbb{R} in den obigen Beispielen topologische Basen sind.

Übung 1.14. Zeige:

- (a) Die Sorgenfrey-Topologie auf \mathbb{R} ist strikt feiner als die euklidische.
- (b) Die K-Topologie auf \mathbb{R} ist strikt feiner als die euklidische.
- (c) Die Sorgenfrey-Topologie und die K-Topologie sind nicht vergleichbar.

Manchmal möchte man einfach nur die kleinste Topologie, in der bestimmte Mengen offen sind, selbst wenn diese Mengen keine topologische Basis bilden. Dazu dient der folgende Begriff: Eine (**topologische**) **Subbasis** auf X ist eine Menge \mathcal{S} von Teilmengen von X mit $\bigcup \mathcal{S} = X$.

Lemma 1.15. Sei \mathcal{S} eine Subbasis auf X . Die Menge aller Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Elementen aus \mathcal{S} ist eine Topologie auf X .

Wie im Fall von Basen nennt man diese Topologie die **von \mathcal{S} erzeugte Topologie**.

Beweis. Nach Prop. 1.11 genügt es zu zeigen, dass die Menge \mathcal{B} aller endlichen Durchschnitt von Elementen aus \mathcal{S} eine Basis ist. Jedes $x \in X$ ist in einem Element von \mathcal{S} enthalten, also auch in einem von \mathcal{B} . Für die zweite Bedingung seien

$$B_1 = S_1 \cap \dots \cap S_m \quad \text{und} \quad B_2 = S'_1 \cap \dots \cap S'_n$$

zwei Elemente von \mathcal{B} . Dann ist $B_1 \cap B_2 = S_1 \cap \dots \cap S_m \cap S'_1 \cap \dots \cap S'_n$ offenbar ebenfalls ein endlicher Durchschnitt von Elementen aus \mathcal{S} . Damit ist \mathcal{B} eine Basis. \square

Übung 1.15. Es sei \mathcal{B} eine topologische Basis auf einer Menge X . Zeige, dass die von \mathcal{B} erzeugte Topologie gerade der Durchschnitt aller Topologien ist, die \mathcal{B} enthalten. Zeige dieselbe Aussage im Fall einer Subbasis.

1.5. DIE PRODUKTTOPOLOGIE FÜR ZWEI RÄUME

Als Anwendung des vorigen Abschnitts erklären wir das kartesische Produkt von zwei topologischen Räumen. (Die allgemeine Produkttopologie kommt später.)

Es seien X und Y zwei topologische Räume. Dann würden wir aus den gegebenen Topologien gern in vernünftiger Weise eine Topologie auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ bauen. Dazu nehmen wir einfach die Basis

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \text{ ist offen in } X \text{ und } V \text{ ist offen in } Y\}$$

und nennen die von ihr erzeugte Topologie die **Produkttopologie auf $X \times Y$** .

Wir müssen zeigen, dass \mathcal{B} tatsächlich eine Basis ist. Die erste Bedingung ist trivial, da $X \times Y \in \mathcal{B}$ gilt. Für die zweite Bedingung genügt es zu bemerken, dass

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

für beliebige offene Mengen $U_1, U_2 \subset X$ und $V_1, V_2 \subset Y$ gilt. Der Schnitt zweier Basismengen ist also wieder eine Basismenge.

Andererseits bilden die offenen 'Rechtecke' \mathcal{B} selbst noch keine Topologie, denn \mathcal{B} ist nicht abgeschlossen unter Vereinigungen, nicht einmal unter endlichen. Die Vereinigung $(U_1 \times V_1) \cup (U_2 \times V_2)$ ist im allgemeinen nicht wieder kartesisches Produkt zweier Teilmengen von X und Y .

Proposition 1.16. *Es sei \mathcal{B} eine Basis der Topologie auf X und \mathcal{C} eine Basis der Topologie auf Y . Dann ist*

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$

eine Basis der Produkttopologie auf $X \times Y$.

Beweis. Das zeigen wir mithilfe von Lemma 1.12. Es sei W eine offene Teilmenge von $X \times Y$ und $(x, y) \in W$. Nach Definition der Produkttopologie gibt es offene Teilmengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ mit $(x, y) \in U \times V \subset W$. Da \mathcal{B} und \mathcal{C} Basen von X bzw. Y sind, gibt es $B \in \mathcal{B}$ und $C \in \mathcal{C}$ mit $x \in B \subset U$ und $y \in C \subset V$. Also gilt $(x, y) \in B \times C \subset W$, was zeigt, dass \mathcal{D} eine Basis der Produkttopologie ist. \square

Beispiel 1.17. Sei $X = Y = \mathbb{R}$ die reelle Gerade mit der euklidischen Topologie. Dann wird die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ von allen kartesischen Produkten $U \times V$, mit $U, V \subset \mathbb{R}$ offen, als Basis erzeugt. Die vorangehende Proposition zeigt, dass man sich als Basis auch auf die Produkte $(a, b) \times (c, d)$ von offenen Intervallen beschränken kann.

Im übrigen sehen wir, dass die Produkttopologie auf \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Topologie auf \mathbb{R}^2 übereinstimmt, die durch den euklidischen Abstand definiert ist, also die offenen Kreisscheiben als Basis hat. Denn nach Prop. 1.3 kann man ebenso gut die durch die ∞ -Norm definierten offenen Kugeln betrachten, und diese sind von der Form $B_\infty((a, b), r) = (a - r, a + r) \times (b - r, b + r)$ für $(a, b) \in \mathbb{R}^2, r > 0$, und damit also Basismengen in der Produkttopologie. Es ist leicht zu sehen, dass diese ausreichen, um die Produkttopologie zu erzeugen.

Übung 1.16. Es seien X und Y zwei topologische Räume. Zeige, dass die Menge

$$S = \{U \times Y \mid U \subset X \text{ offen}\} \cup \{X \times V \mid V \subset Y \text{ offen}\}$$

eine Subbasis für die Produkttopologie auf $X \times Y$ ist.

Übung 1.17. Es seien X und Y zwei topologische Räume und $M \subset X, N \subset Y$ zwei Teilmengen. Zeige, dass

$$\overline{M \times N} = \overline{M} \times \overline{N}$$

in der Produkttopologie gilt.

1.6. TEILRÄUME

Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Dann machen wir Y zu einem topologischen Raum, versehen mit der **Teilraumtopologie**, **Spurtopologie** oder **induzierten Topologie**, definiert wie folgt: Eine Teilmenge U von Y ist **offen in Y** , wenn es eine offene Teilmenge V von X gibt derart, dass $U = V \cap Y$ gilt. Die Sprechweise „offen in“ bedeutet stets, dass von der Teilraumtopologie die Rede ist. Als Menge ist die Topologie auf Y also gerade $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$.

Die Teilmenge Y als topologischer Raum versehen mit der Teilraumtopologie heißt ein **Teilraum von X** .

Übung 1.18. Überzeuge Dich, dass \mathcal{T}_Y wirklich eine Topologie ist.

Lemma 1.18. *Es sei $Y \subset X$ und sei \mathcal{B} eine Basis für die Topologie von X . Dann ist $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ eine Basis für die Teilraumtopologie auf Y .*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 1.12: Ist U offen in X und $y \in U \cap Y$, dann gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $y \in B \subset U$. Damit auch $y \in (B \cap Y) \subset (U \cap Y)$, was zeigt, dass \mathcal{B}_Y eine Basis für die Teilraumtopologie ist. \square

Beispiel 1.19. Es sei $X = \mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie und $Y = [0, 1]$. Die Teilraumtopologie hat nach Lemma 1.18 die Basismengen der Form $(a, b) \cap [0, 1]$, $a, b \in \mathbb{R} a < b$. Für einen solchen Schnitt gibt es mehrere Möglichkeiten:

$$(a, b) \cap [0, 1] = \begin{cases} (a, b) & \text{falls } 0 \leq a < b \leq 1 \\ [0, b) & \text{falls } a < 0 \leq b \leq 1 \\ (a, 1] & \text{falls } 0 \leq a \leq 1 < b \\ [0, 1] & \text{falls } a < 0, 1 < b \\ \emptyset & \text{falls } a, b \leq 0 \text{ oder } a, b \geq 1. \end{cases}$$

Alle diese Mengen sind also offen in Y . Aber nicht alle sind offen in \mathbb{R} .

Dieses Beispiel fasst eigentlich schon alle Schwierigkeiten mit der Teilraumtopologie zusammen. Man muss nur aufpassen, auf welchen umgebenden Raum sich die Worte „offen“ und „abgeschlossen“ usw. jeweils beziehen.

Offene Teilräume sind dagegen völlig harmlos:

Proposition 1.20. *Es sei Y eine offene Teilmenge von X . Dann ist $U \subset Y$ offen in Y genau dann, wenn U offen in X ist.*

Beweis. Ist U offen in X , so ist $U = U \cap Y$ offen in Y . Ist umgekehrt U offen in Y , so gibt es V offen in X mit $U = Y \cap V$. Da Y offen ist, ist dann auch U offen. \square

Übung 1.19. Es sei $A \subset Y \subset X$. Zeige, dass A genau dann abgeschlossen in Y ist, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge C von X mit $A = C \cap Y$ gibt.

Übung 1.20. Es seien X und Y topologische Räume und $A \subset X$ und $B \subset Y$ Teilräume. Zeige, dass die Teilraumtopologie auf $A \times B \subset X \times Y$, bezüglich der Produkttopologie auf $X \times Y$, mit der Produkttopologie der Teilraumtopologien übereinstimmt.

1.7. HAUSDORFF-RÄUME

Die Definition eines topologischen Raums ist so allgemein, dass unsere „euklidische“ Intuition häufig versagt. Zum Beispiel sind Punkte in \mathbb{R}^2 immer abgeschlossen. Das braucht in allgemeinen topologischen Räumen nicht zu stimmen. Betrachte zum Beispiel den Sierpiński-Raum $X = \{a, b\}$ mit der Topologie $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ (Beispiel 1.4(7)). Hier ist die einpunktige Menge $\{a\}$ nicht abgeschlossen, da $X \setminus \{a\} = \{b\}$ nicht offen ist.

Ähnlich problematisch ist es, sich auf die aus der Analysis gewohnten Argumente mit Folgenkonvergenz zu verlassen. Die Definition macht keine Probleme: Es sei X ein topologischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $x \in X$ ein Punkt. Die Folge (x_n) **konvergiert gegen x** , wenn folgendes gilt: Zu jeder Umgebung U von x gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Dass man die Topologie auf X über Folgen verstehen kann, ist aber nicht ausgemacht. Es ist zum Beispiel in allgemeinen topologischen Räumen noch nicht einmal wahr, dass der Limes einer Folge eindeutig ist, sobald er existiert. Im Sierpiński-Raum konvergiert etwa die konstante Folge $x_n = a$ nicht nur gegen a , sondern auch gegen b . Das Problem ist dabei offenbar, dass es keine offene Menge gibt, die den Punkt b von a trennt.

Topologische Räume, die unserer Vorstellung von vernünftigen Räumen schon näher kommen, sind solche, mit der folgenden Eigenschaft. Ein topologischer Raum X heißt ein **Hausdorff-Raum**, wenn je zwei Punkte in X disjunkte Umgebungen besitzen. Mit anderen Worten, in einem Hausdorff-Raum existieren zu je zwei Punkten $x_1, x_2 \in X$ offene Teilmengen U_1, U_2 von X mit $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Die Hausdorff-Eigenschaft erscheint unmittelbar vernünftig und in der Frühzeit der Topologie war es auch nicht unüblich, sie den Axiomen eines topologischen Raums hinzuzufügen. Topologische Räume, die diese Eigenschaft nicht haben, treten aber auch außerhalb der Topologie auf, zum Beispiel in der algebraischen Geometrie. Trotzdem werden die interessantesten Aussagen in dieser Vorlesung alle von Hausdorff-Räumen handeln.

Proposition 1.21. *In einem Hausdorff-Raum ist jede endliche Menge abgeschlossen.*

Beweis. Da endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, genügt es zu zeigen, dass jede einpunktige Teilmenge abgeschlossen ist. Sei $x_0 \in X$. Ist $x \in X$ mit $x \neq x_0$, dann besitzen x_0 und x disjunkte Umgebungen. Insbesondere besitzt x eine Umgebung, die x_0 nicht enthält. Daraus folgt $x \notin \overline{\{x_0\}}$. Das zeigt $\overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$, also ist $\{x_0\}$ abgeschlossen. \square

Der Beweis zeigt, dass das volle Hausdorff-Axiom nicht gebraucht wird, um zu beweisen, dass Punkte abgeschlossen sind. Tatsächlich gibt es topologische Räume, in denen Punkte abgeschlossen sind, die aber keine Hausdorff-Räume sind. (Zum Beispiel jede unendliche Menge mit der co-endlichen Topologie).

Übung 1.21. Zeige: Genau dann sind in einem topologischen Raum alle einpunktigen Mengen abgeschlossen, wenn von je zwei verschiedenen Punkten jeder eine Umgebung besitzt, die den anderen nicht enthält.

Übung 1.22. Es sei X eine unendliche Menge. Zeige, dass X mit der co-endlichen Topologie kein Hausdorff-Raum ist. Gegen welche Punkte konvergiert die Folge $x_n = 1/n$ in der co-endlichen Topologie auf \mathbb{R} ?

Statt nur der Hausdorff-Eigenschaft wird in der Topologie eine ganze Hierarchie von Trennungseigenschaften studiert, die üblicherweise von schwächer nach stärker geordnet und mit T_0, T_1, \dots, T_5 (und diversen Varianten) bezeichnet werden. Dabei entspricht T_2 der Hausdorff-Eigenschaft und T_1 der Abgeschlossenheit einpunktiger Mengen. In dieser Vorlesung wird das aber keine Rolle spielen.

Proposition 1.22. *Es sei X ein topologischer Raum, in dem alle endlichen Teilmengen abgeschlossen sind (T_1). Sei $A \subset X$ und $x \in X$. Genau dann ist x ein Häufungspunkt von A , wenn jede Umgebung von x unendlich viele Punkte von A enthält.*

Beweis. Wenn jede Umgebung von x unendlich viele Punkte von A enthält, dann enthält auch jede Umgebung von x einen Punkt aus A , der nicht mit x übereinstimmt. Also ist x ein Häufungspunkt. Für die umgekehrte Richtung beweisen wir die Kontraposition: Sei $x \in X$ ein Punkt mit einer Umgebung U , die A nur in endlich vielen Punkten schneidet. Sei C die endliche Menge $(U \cap A) \setminus \{x\}$. Nach Voraussetzung ist C abgeschlossen, also ist $X \setminus C$ offen und $U \cap (X \setminus C)$ eine Umgebung von x , die A höchstens in x schneidet. Also ist x kein Häufungspunkt von A . \square

Übung 1.23. Was sagt diese Proposition im Fall eines endlichen topologischen Raums X ?

Proposition 1.23. *In einem Hausdorff-Raum X konvergiert eine Folge gegen höchstens einen Punkt von X .*

Beweis. Es sei (x_n) eine Folge in X , die gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert. Ist $y \neq x$, so gibt es Umgebungen U bzw. V von x bzw. y mit $U \cap V = \emptyset$. Da (x_n) gegen x konvergiert, enthält U alle bis auf endlich viele Folgenglieder. Dann kann V nur endlich viele Folgenglieder enthalten. Also konvergiert (x_n) nicht gegen y . \square

In Hausdorff-Räumen verhalten sich Folgen also etwas vernünftiger als in allgemeinen topologischen Räumen. Es zeigt sich allerdings, dass dies allein noch nicht ausreicht, um die Topologie vollständig über Folgenkonvergenz zu verstehen. Es ist zum Beispiel auch in Hausdorff-Räumen im allgemeinen nicht wahr, dass eine Menge genau dann abgeschlossen ist, wenn sie zu jeder in ihr enthaltenen konvergenten Folge den Grenzwert enthält. Das Problem ist die Abzählbarkeit, die in die Definition einer Folge eingebaut ist.

Übung 1.24. Es seien X und Y zwei Hausdorff-Räume. Zeige, dass $X \times Y$ mit der Produkttopologie wieder ein Hausdorff-Raum ist.

Übung 1.25. Es sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass X genau dann ein Hausdorff-Raum ist, wenn die **Diagonale**

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$

in der Produkttopologie abgeschlossen ist.

1.8. STETIGE ABBILDUNGEN

Es seien X und Y zwei topologische Räume. Eine Abbildung

$$f: X \rightarrow Y$$

heißt **stetig** (bezüglich der gegebenen Topologien), wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Teilmenge $V \subset Y$ offen in X ist.

Proposition 1.24. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Äquivalent sind:*

- (1) f ist stetig.
- (2) Für jede Teilmenge $M \subset X$ gilt $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.
- (3) Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X .
- (4) Für jedes $x \in X$ und jede Umgebung V von $f(x)$ gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$.

Gilt Bedingung (4) in einem Punkt $x \in X$, so sagen wir, dass f **stetig in x** ist.

Beweis. (1) \implies (2). Sei f stetig, sei $M \subset X$ und $x \in \overline{M}$. Ist V eine Umgebung von $f(x)$, so ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x . Es gibt also $x' \in M \cap f^{-1}(V)$. Also gilt $f(x') \in V \cap f(M)$ und damit $f(x) \in \overline{f(M)}$.

(2) \implies (3). Es sei $A \subset Y$ abgeschlossen und $B = f^{-1}(A)$. Dann gilt $f(B) = f(f^{-1}(A)) \subset A$. Für $x \in \overline{B}$ gilt daher

$$f(x) \in f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)} \subset \overline{A} = A,$$

weil A abgeschlossen ist. Es folgt $x \in f^{-1}(A) = B$, so dass wir $\overline{B} \subset B$ gezeigt haben. Also ist B abgeschlossen.

(3) \implies (1). Es sei $V \subset Y$ offen und setze $A = Y \setminus V$. Dann gilt

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(V).$$

Da A abgeschlossen ist, ist auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen und damit $f^{-1}(V)$ offen.

(1) \implies (4). Es sei $x \in X$ und V eine Umgebung von $f(x)$. Dann ist $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x mit $f(U) \subset V$.

(4) \implies (1). Es sei $V \subset Y$ offen und $x \in f^{-1}(V)$. Dann gilt $f(x) \in V$, also gibt es eine Umgebung U_x von x mit $f(U_x) \subset V$ und damit $U_x \subset f^{-1}(V)$. Es folgt $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in X} U_x$, also ist $f^{-1}(V)$ offen. \square

Übung 1.26. Überzeuge Dich, dass die letzte äquivalente Eigenschaft in Prop. 1.24 für die euklidische Topologie auf \mathbb{R}^n gerade der üblichen ε - δ -Definition von Stetigkeit entspricht.

Übung 1.27. Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig und sei x ein Häufungspunkt einer Teilmenge M von X . Ist $f(x)$ ein Häufungspunkt von $f(M)$?

Übung 1.28. Finde eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die nur in genau einem Punkt stetig ist.

Proposition 1.25. *Es seien X, Y und Z topologische Räume.*

- (1) *Für jedes $y \in Y$ ist die konstante Abbildung definiert durch $f(x) = y$ für alle $x \in X$ stetig.*
- (2) *Ist Z ein Teilraum von X , so ist die Inklusion $Z \subset X$ stetig.*
- (3) *Sind $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetig, so auch die Komposition $g \circ f: X \rightarrow Z$.*
- (4) *Ist $f: X \rightarrow Y$ stetig und ist $Z \subset X$ ein Teilraum, so ist die Einschränkung $f|_Z: Z \rightarrow Y$ stetig.*
- (5) *Ist $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X derart, dass $f|_U: U \rightarrow Y$ für alle $U \in \mathcal{U}$ stetig ist, dann ist f stetig.*

Im letzten Punkt ist eine **offene Überdeckung** von X eine Menge \mathcal{U} von offenen Teilmengen von X mit $\bigcup \mathcal{U} = X$.

Beweis. (1)–(4) Übung.

(5) Es sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X mit $f|_U$ stetig für alle $U \in \mathcal{U}$. Sei $V \subset Y$ offen. Für $U \in \mathcal{U}$ gilt dann

$$f^{-1}(V) \cap U = (f|_U)^{-1}(V).$$

Da $f|_U$ stetig ist, ist also $f^{-1}(V) \cap U$ offen und damit auch

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (f^{-1}(V) \cap U). \quad \square$$

Übung 1.29. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und \mathcal{S} eine Subbasis (oder Basis) für die Topologie von Y . Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn $f^{-1}(V)$ für alle $V \in \mathcal{S}$ offen in X ist.

Übung 1.30. Es sei X ein topologischer Raum und sei Y ein Hausdorff-Raum. Sei $M \subset X$ eine dichte Teilmenge (also $\overline{M} = X$). Zeige: Sind f_1, f_2 zwei stetige Abbildungen $X \rightarrow Y$ mit $f_1|_M = f_2|_M$, so folgt $f_1 = f_2$.

Eine stetige Bijektion $f: X \rightarrow Y$, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist, heißt **Homöomorphismus** von X und Y . Mit anderen Worten, f ist ein Homöomorphismus falls $U \subset X$ genau dann offen ist, wenn $f(U)$ offen in Y ist, für alle Teilmengen $U \subset X$.

Allgemein heißt eine Abbildung $X \rightarrow Y$ mit der Eigenschaft, dass Bilder offener (bzw. abgeschlossener) Mengen in X offen (bzw. abgeschlossen) in Y sind, eine **offene Abbildung** (bzw. eine **abgeschlossene Abbildung**). Ein Homöomorphismus ist also eine offene stetige Bijektion (äquivalent: abgeschlossene stetige Bijektion).

Existiert zwischen zwei topologischen Räumen X und Y irgendein Homöomorphismus, so sagt man, X und Y sind **homöomorph**. Analog zu den Isomorphismen in der Algebra sind Homöomorphismen die strukturhaltenden Bijektionen der Topologie. Homöomorphe Räume sind für die Topologie ununterscheidbar.

Beispiel 1.26. Eine stetige Bijektion muss nicht unbedingt ein Homöomorphismus sein. Es sei etwa \mathbb{R}_S die Sorgenfrey-Gerade und sei $f: \mathbb{R}_S \rightarrow \mathbb{R}$ die Identität $x \mapsto x$. Dies ist eine stetige Bijektion, aber kein Homöomorphismus, was genau daran liegt, dass die Sorgenfrey-Topologie strikt feiner ist als die euklidische (Aufgabe 1.14).

Betrachten wir noch ein weniger künstliches Beispiel. Es sei $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ versehen mit der Teilraumtopologie und sei

$$F: \begin{cases} [0, 1) & \rightarrow & S^1 \\ t & \mapsto & (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{cases} .$$

Die Abbildung F ist bijektiv und stetig. Sie ist jedoch kein Homöomorphismus. Das ist anschaulich klar, schließlich werden die beiden Enden des Intervalls „zusammengeklebt“. Dies zeigt sich darin, dass das Bild einer offenen Teilmenge $[0, \alpha) \subset [0, 1)$, $\alpha < 1$, nicht offen in S^1 ist, denn $f(0)$ ist ein Randpunkt dieser Menge.

Bemerkung 1.27. Eine stetige Bijektion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ wird flächenfüllende Kurve genannt. Die Existenz einer solchen Abbildung wurde zuerst durch Peano im Jahr 1890 gezeigt. (Diese und verwandte Konstruktionen werden wir in einem Proseminar-Vortrag sehen.) Bereits die Existenz einer Bijektion, ob stetig oder nicht, die von Cantor im Jahr 1875 bemerkt wurde, hatte in der Mathematik für große Verwirrung gesorgt. Berümt geworden ist dazu der Ausspruch Cantors in einem Brief an Dedekind: „Ich sehe es, aber ich kann es nicht glauben.“ Diese Entdeckungen haben die exakte Grundlegung von Mengenlehre und Topologie in den darauffolgenden Jahrzehnten wesentlich motiviert. Tatsächlich gibt es zwischen \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 zwar stetige Bijektionen, aber eben *keinen* Homöomorphismus. Es ist aber nicht ganz leicht, das zu beweisen (Brouwer 1912).

2. ZUSAMMENHANG UND KOMPAKTHEIT

2.1. ZUSAMMENHANG UND WEGZUSAMMENHANG

Es sei X ein topologischer Raum. Eine **Zerlegung** von X ist ein Paar U, V von nicht-leeren offenen Teilmengen von X mit

$$X = U \cup V \quad \text{und} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Der Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn er keine Zerlegung besitzt.

Ist $X = U \cup V$ eine Zerlegung von X , so sind $U = X \setminus V$ und $V = X \setminus U$ offen und abgeschlossen zugleich. Umgekehrt definiert jede abgeschlossene offene Menge zusammen mit ihrem Komplement eine Zerlegung. Es gilt also:

Lemma 2.1. *Genau dann ist X zusammenhängend, wenn X und \emptyset die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.* \square

Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt zusammenhängend, wenn sie als topologischer Raum in der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

Beispiele 2.2. (1) Es sei $Y = [-1, 0) \cup (0, 1]$ als Teilraum der reellen Geraden $X = \mathbb{R}$. Die beiden Mengen $[-1, 0)$ und $(0, 1]$ sind offen in Y (aber nicht in X) und definieren damit eine Zerlegung von Y .

(2) Die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von $Y = \mathbb{Q}$ als Teilraum von \mathbb{R} sind die einpunktigen Mengen. Denn ist $Y \subset \mathbb{Q}$ mit $a, b \in Y$, $a < b$, so gibt es eine irrationale Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit $a < r < b$. Das ergibt eine Zerlegung (Dedekind-Schnitt)

$$Y = (Y \cap (-\infty, r)) \cup (Y \cap (r, \infty)).$$

(3) Ein ähnliches Argument zeigt, dass die zusammenhängenden Teilmengen der Sorgenfrey-Geraden \mathbb{R}_S ebenfalls nur die einpunktigen Mengen sind.

(4) Es sei $Y = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ und } y = 1/x\}$. Obwohl der Hyperbelzweig der Geraden asymptotisch beliebig nahe kommt, ist Y dennoch nicht zusammenhängend, denn man sieht leicht, dass Gerade und Hyperbelzweig jeweils offen und abgeschlossen in Y sind.

Lemma 2.3. *Ist $X = U \cup V$ eine Zerlegung von X und ist Y eine zusammenhängende Teilmenge von X , so gilt $Y \subset U$ oder $Y \subset V$.*

Beweis. Es gilt $Y = (U \cap Y) \cup (V \cap Y)$, also ist eine der beiden Mengen leer. \square

Lemma 2.4. *Ist $Y \subset X$ eine zusammenhängende Teilmenge und ist Z eine Teilmenge mit $Y \subset Z \subset \bar{Y}$, so ist Z zusammenhängend. Insbesondere ist der Abschluss einer zusammenhängenden Menge zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $Z = U \cup V$ mit U und V offen in Z und disjunkt. Nach Lemma 2.3 gilt $Y \subset U$ oder $Y \subset V$, etwa $Y \subset U$. Dann auch $\bar{Y} \subset \bar{U}$ und damit $Z \subset \bar{U}$. Andererseits ist U offen und abgeschlossen in Z und damit gilt $U = \bar{U} \cap Z$ (denn $\bar{U} \cap Z$ ist der Abschluss von U in Z), also $V \cap \bar{U} = \emptyset$. Dies impliziert $V = \emptyset$, was zeigt, dass Z zusammenhängend ist. \square

Übung 2.1. Es sei X ein topologischer Raum. Ein Teilraum Y von X ist genau dann nicht zusammenhängend, wenn Y die Vereinigung zweier disjunkter nichtleerer Teilmengen A und B ist derart, dass A keinen Häufungspunkt von B enthält und umgekehrt.

Lemma 2.5. *Ist \mathcal{Y} eine Menge von zusammenhängenden Teilmengen eines topologischen Raums X mit $\bigcap \mathcal{Y} \neq \emptyset$, so ist $\bigcup \mathcal{Y}$ zusammenhängend.*

Beweis. Setze $M = \bigcup \mathcal{Y}$ und sei $M = U \cup V$ mit U und V disjunkt und offen in M . Es sei $y \in \bigcap \mathcal{Y}$. Dann liegt y in U oder V , ohne Einschränkung etwa in U . Ist $Y \in \mathcal{Y}$, so gilt $y \in Y \cap U$ und damit $Y \subset U$ nach Lemma 2.3, da Y zusammenhängend ist. Also folgt $U = \bigcup \mathcal{Y} = M$ und $V = \emptyset$. \square

Satz 2.6. *Das kartesische Produkt zweier zusammenhängender Räume ist zusammenhängend in der Produkttopologie.*

Beweis. Seien X und Y zusammenhängend. Fixiere einen Punkt $(a, b) \in X \times Y$. Nun ist $X \times \{b\}$ homöomorph zu X und $\{x\} \times Y$ homöomorph zu Y für jedes $x \in X$, und damit zusammenhängend. Nach Lemma 2.5 ist also auch

$$T_x = (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y)$$

zusammenhängend, denn beide Mengen enthalten (x, b) . Nun gilt $(a, b) \in T_x$ für alle $x \in X$, also ist $X \times Y = \bigcup_{x \in X} T_x$ zusammenhängend, wieder nach Lemma 2.5. \square

Per Induktion verallgemeinert sich die Aussage auf alle endlichen kartesischen Produkte. Bei unendlich vielen Faktoren gibt es aber überraschende Probleme.

Beispiel 2.7. Es sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Raum aller Folgen in \mathbb{R} mit der **Boxtopologie**. Das ist die direkte Verallgemeinerung der Produkttopologie auf unendlich viele Faktoren, d.h. eine Basis ist durch alle Produkte von offenen Teilmengen gegeben.

Es sei $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller beschränkten Folgen und $U \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller unbeschränkten Folgen. Dann gilt $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = B \cup U$ und $B \cap U = \emptyset$. Außerdem sind B und U offen in der Boxtopologie. Denn ist $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge, so ist

$$V = \prod_{n \in \mathbb{N}} (a_n - 1, a_n + 1)$$

eine Umgebung von (a_n) . Ist (a_n) beschränkt, so gilt offenbar $V \subset B$ und ist (a_n) unbeschränkt, so gilt $V \subset U$. Also sind B und U offen, was zeigt, dass $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ in der Boxtopologie nicht zusammenhängend ist.

Übung 2.2. Sei X ein topologischer Raum. Zeige: Ist $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge zusammenhängender Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ und $Y_n \cap Y_{n+1} \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist X zusammenhängend.

Übung 2.3. Seien X und Y zusammenhängende Räume und $M \subsetneq X$, $N \subsetneq Y$. Zeige, dass $(X \times Y) \setminus (M \times N)$ zusammenhängend ist.

Übung 2.4. Es sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ eine Teilmenge und C eine zusammenhängende Teilmenge. Zeige: Falls $C \cap M \neq \emptyset$ und $C \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$, dann folgt $C \cap \partial M \neq \emptyset$.

Übung 2.5. Es sei $Y \subset X$, beide zusammenhängend. Zeige: Ist $X \setminus Y = U \cup V$ eine Zerlegung, so sind $Y \cup U$ und $Y \cup V$ zusammenhängend.

Proposition 2.8. *Das Bild eines zusammenhängenden Raums unter einer stetigen Abbildung ist zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und sei $M \subset X$ zusammenhängend. Wir müssen zeigen, dass $f(M)$ zusammenhängend ist. Indem wir f auf M einschränken und Y durch $f(M)$ ersetzen, können wir ohne Einschränkung $M = X$ und f surjektiv annehmen. Es sei $Y = U \cup V$ mit $U, V \subset Y$ offen und disjunkt, dann gilt $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Da X zusammenhängend ist und f stetig, muss $f^{-1}(U) = \emptyset$ oder $f^{-1}(V) = \emptyset$ gelten. Da f surjektiv ist, folgt $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. Also ist Y zusammenhängend. \square

Korollar 2.9 (Zwischenwertsatz). *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq f(b)$. Dann gilt $[f(a), f(b)] \subset f[a, b]$.*

Beweis. Gäbe es $y \in [f(a), f(b)]$ mit $y \notin f[a, b]$, so wäre durch $f[a, b] \cap [f(a), y)$ und $f[a, b] \cap (y, f(b)]$ eine Zerlegung von $f[a, b]$ gegeben. Das ist aber nicht möglich, denn $f[a, b]$ ist als Bild des Intervalls $[a, b]$ zusammenhängend. \square

Der Zwischenwertsatz führt direkt auf einen naheliegenden alternativen Begriff von Zusammenhang. Eine stetige Abbildung

$$f: [a, b] \rightarrow X$$

definiert auf einem beschränkten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ wird **Weg** in X genannt. Die Punkte $x = f(a)$ bzw. $y = f(b)$ heißen **Anfangspunkt** bzw. **Endpunkt** des Weges, und der Weg f **verbindet** x und y . Der Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn je zwei Punkte in X durch einen Weg in X verbunden werden können.

Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend. Denn ist $X = U \cup V$ eine Zerlegung von X , so ist jeder Weg in X entweder in U oder V enthalten, so dass Punkte in U nicht mit Punkten in V verbindbar sind. Das folgende berühmte Beispiel zeigt aber, dass die Umkehrung nicht stimmt.

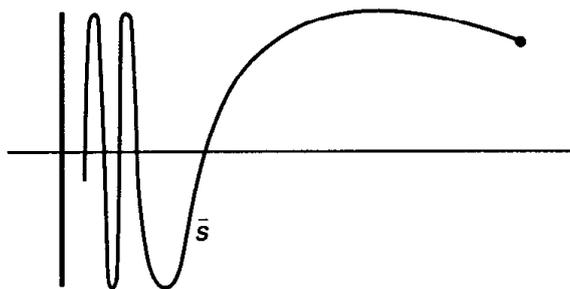


ABBILDUNG 1. Die Sinuskurve der Topologen [Mu, Fig. 24.5]

Beispiel 2.10. Es sei

$$S = \{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}.$$

Die Menge S ist zusammenhängend, denn sie ist das stetige Bild des Intervalls $(0, 1]$ unter der stetigen Abbildung $x \mapsto (x, \sin(1/x))$. Die Menge \bar{S} wird die **Sinuskurve der Topologen** genannt (siehe Abb. 1). Man überlegt sich zunächst, dass

$$\bar{S} = S \cup L \quad \text{mit} \quad L = \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$$

gilt. Nach Lemma 2.4 ist auch \bar{S} zusammenhängend. Allerdings ist \bar{S} nicht wegzusammenhängend. Angenommen es gäbe einen Weg $f: [a, c] \rightarrow \bar{S}$ mit $f(a) = (0, 0)$ und $f(c) \in S$. Die Menge $f^{-1}(L) \subset [a, c]$ ist abgeschlossen, enthält also eine größte Zahl b . Die Einschränkung $f: [b, c] \rightarrow \bar{S}$ erfüllt dann $f(b) \in L$ und $f(t) \in S$ für alle $t > b$. Ohne Einschränkung sei $[b, c] = [0, 1]$ und schreibe $f(t) = (x(t), y(t))$. Dann gilt also $x(0) = 0$ und $x(t) > 0$ und $y(t) = 1/\sin(x(t))$ für $t \in (0, 1]$.

Für $n \in \mathbb{N}$, wähle u_n mit $0 < u_n < x(1/n)$ und $\sin(1/u_n) = (-1)^n$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es t_n mit $0 < t_n < 1/n$ und $x(t_n) = u_n$. Damit ist die Folge (t_n) eine Nullfolge in $(0, 1]$ mit $y(t_n) = (-1)^n$ für alle n . Dies widerspricht der Stetigkeit der Funktion $t \mapsto y(t)$ und damit der Stetigkeit von f .

Übung 2.6. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar, $n > 1$. Zeige, dass $\mathbb{R}^n \setminus A$ wegzusammenhängend ist. (*Hinweis.* Betrachte die Menge aller Geraden durch einen Punkt in \mathbb{R}^2 .)

Bemerkung 2.11. Mit Zusammenhangsargumenten kann man leicht zeigen, dass \mathbb{R}^n für $n > 1$ nicht zu \mathbb{R} homöomorph ist. Denn angenommen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ wäre ein Homöomorphismus. Ist $x \in \mathbb{R}$ ein Punkt, dann wäre auch die Einschränkung von f auf $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ ein Homöomorphismus auf $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ mit $y = f(x)$. Aber $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ ist nicht zusammenhängend. Dagegen ist $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ sogar wegzusammenhängend (Aufgabe 2.6). Dieses simple Argument hilft aber nicht unmittelbar weiter, wenn man zeigen möchte, dass \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n für alle $m \neq n$ nicht homöomorph sind.

Übung 2.7. Sei U eine offene zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^n . Zeige, dass U wegzusammenhängend ist. (*Hinweis.* Betrachte die Menge aller Punkte in U , die mit einem festen Punkt $x_0 \in U$ verbindbar sind.)

2.2. ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN UND LOKALER ZUSAMMENHANG

Jeder topologische Raum kann in zusammenhängende Teile zerlegt werden. Formal geht das folgendermaßen: Ist X ein topologischer Raum, so erkläre eine Äquivalenzrelation \sim auf X , in der $x \sim y$ genau dann gelte, wenn es eine zusammenhängende Teilmenge von X gibt, die x und y enthält. Es ist klar, dass diese Relation symmetrisch und reflexiv ist. Transitivität folgt aus Lemma 2.5: Denn ist M eine zusammenhängende Teilmenge, die x und y enthält, und N eine zusammenhängende Teilmenge, die y und z enthält, dann liegt y in $M \cap N$, so dass $M \cup N$ zusammenhängend ist und x und z enthält. Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt also $x \sim z$.

Die Äquivalenzklassen unter dieser Relation heißen die **Zusammenhangskomponenten** oder kurz **Komponenten** von X .

Proposition 2.12. *Die Komponenten von X sind disjunkte zusammenhängende Teilmengen, deren Vereinigung X ist.*

Beweis. Da die Komponenten Äquivalenzklassen sind, sind sie disjunkt und ihre Vereinigung ist X . Sei C eine Komponente. Um zu zeigen, dass C zusammenhängend ist, fixiere $x_0 \in C$ und wähle zu jedem $x \in C$ eine zusammenhängende Teilmenge M_x von X mit $x_0, x \in M_x$. Dann gilt $M_x \subset C$ (nach Definition von C) und damit $C = \bigcup_{x \in C} M_x$. Also ist C zusammenhängend nach Lemma 2.5. \square

Übung 2.8. Zeige: Die Zerlegung von X in Komponenten ist die eindeutige Zerlegung von X in disjunkte zusammenhängende Teilmengen mit der Eigenschaft, dass jede zusammenhängende Teilmenge von X genau ein Element der Zerlegung schneidet.

Genauso kann man eine Äquivalenzrelation über den Wegzusammenhang definieren. Darin sind zwei Punkte x und y äquivalent, wenn es einen Weg in X gibt, der x und y miteinander verbindet. Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen die **Wegkomponenten** von X .

Übung 2.9. Zeige, dass dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

Übung 2.10. Zeige: Die Wegkomponenten von X sind wegzusammenhängend und jede nicht-leere wegzusammenhängende Teilmenge von X schneidet genau eine von ihnen.

Proposition 2.13. *Jede Komponente eines topologischen Raums ist abgeschlossen.*

Beweis. Ist C eine Komponente, so ist \overline{C} zusammenhängend nach Lemma 2.4. Also liegen alle Punkte von \overline{C} in derselben Komponente, was $\overline{C} = C$ bedeutet. \square

Besitzt ein Raum nur endlich viele Komponenten, so sind diese also auch offen, denn das Komplement einer Komponente ist die Vereinigung der übrigen Komponenten. Im allgemeinen kann es aber unendlich viele Komponenten geben, und diese brauchen dann nicht offen zu sein. Über Offenheit und Abgeschlossenheit von Wegkomponenten lässt sich im allgemeinen nichts sagen.

Beispiele 2.14. (1) Wir haben gesehen, dass in $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nur einpunktige Teilmengen zusammenhängend sind. Die Komponenten von \mathbb{Q} sind also die einzelnen

Punkte (und damit nicht offen). Allgemein heißt ein Raum, dessen Komponenten seine Punkte sind, **total unzusammenhängend**.

(2) Ebenso ist die Sorgenfrey-Gerade \mathbb{R}_S total unzusammenhängend.

(3) Die Sinuskurve der Topologen (Beispiel 2.10) ist zusammenhängend mit zwei Wegkomponenten. Die eine Wegkomponente ist die Kurve S , die andere das Segment L . Dabei ist S offen in \bar{S} , aber nicht abgeschlossen, während es für L gerade umgekehrt ist.

(4) Nimmt man aus der Sinuskurve der Topologen alle rationalen Punkte in L heraus, so erhält man einen Raum, der weiterhin zusammenhängend ist (Check!) aber überabzählbar viele Wegkomponenten besitzt.

Zusammenhang ist nach der Stetigkeit einer Abbildung eine weitere topologische Eigenschaft, die auch *lokal* sinnvoll definiert werden kann. Ein Raum X heißt **lokal zusammenhängend in einem Punkt** $x \in X$, wenn jede Umgebung von x eine zusammenhängende Umgebung von x enthält. Die Menge heißt **lokal zusammenhängend** schlechthin, wenn sie in jedem Punkt lokal zusammenhängend ist.

Beispiel 2.15. Die Vereinigung zweier disjunkter Kreisscheiben in der reellen Ebene ist nicht zusammenhängend, aber lokal zusammenhängend.

Bemerkung 2.16. Bezeichnet (E) irgendeine Eigenschaft offener Mengen in einem Raum X , so bedeutet „lokal- (E) “ in einem Punkt $x \in X$ in der Regel, dass jede Umgebung von x eine Umgebung mit Eigenschaft (E) enthält. (Man sagt auch, x besitzt eine Umgebungsbasis mit Eigenschaft (E)). Zum Beispiel können wir in dieser Weise *lokal wegzusammenhängend* definieren.

Hin und wieder wird auch nur verlangt, dass der Punkt x überhaupt eine Umgebung mit Eigenschaft (E) besitzt. Für manche Eigenschaften ist das äquivalent, für andere macht es einen Unterschied, zum Beispiel bei lokaler Kompaktheit (siehe dazu §3.29 in [Mu]; beachte auch Aufgabe 2.13).

Proposition 2.17. *Ein Raum X ist genau dann lokal zusammenhängend, wenn für jede offene Teilmenge von X auch ihre Komponenten offen in X sind.*

Beweis. Sei X lokal zusammenhängend; sei $U \subset X$ offen und C eine Komponente von U . Ist x ein Punkt von C , so besitzt x eine zusammenhängende Umgebung V mit $V \subset U$. Da V zusammenhängend ist mit $x \in V \cap C$, folgt $V \subset C$, was zeigt, dass C offen ist. Umgekehrt seien alle Komponenten offener Mengen offen. Sei $x \in X$ und U eine Umgebung von x und sei C die Komponente von U , die x enthält. Dann ist C eine zusammenhängende Umgebung von x , die in U enthalten ist. \square

Übung 2.11. Beweise analog, dass ein Raum X genau dann lokal wegzusammenhängend ist, wenn alle Wegkomponenten offener Mengen in X offen sind.

Übung 2.12. Zeige: Ist X lokal wegzusammenhängend, so stimmen die Wegkomponenten mit den Komponenten überein.

Übung 2.13. Gib ein Beispiel für einen Raum, der wegzusammenhängend ist, aber nicht lokal wegzusammenhängend. (*Hinweis:* Modifiziere die Sinus-Kurve des Topologen.)

2.3. KOMPAKTHEIT

Sei X ein topologischer Raum und Y eine Teilmenge. Eine **offene Überdeckung**¹ von Y in X ist eine Menge \mathcal{U} von offenen Teilmengen von X mit $Y \subset \bigcup \mathcal{U}$. Eine **Teilüberdeckung** einer Überdeckung \mathcal{U} von Y ist eine Teilmenge von \mathcal{U} , die selbst eine Überdeckung von Y ist. Die Menge Y heißt **kompakt**² (oder ein **Kompaktum**), wenn jede offene Überdeckung von Y in X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Übung 2.14. Zeige, dass $Y \subset X$ genau dann kompakt ist, wenn Y als topologischer Raum mit der Teilraumtopologie kompakt ist.

Bekanntlich hat Kompaktheit im euklidischen Raum eine einfachere Beschreibung, die aus der Analysis-Vorlesung bekannt ist.

Satz 2.18 (Heine-Borel). *Eine Teilmenge von \mathbb{R}^n ist in der euklidischen Topologie genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.* \square

Zusammen mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt: Eine Teilmenge A von \mathbb{R}^n ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in A (allgemeiner jede unendliche Teilmenge von A) einen Häufungspunkt in A besitzt. Längere Zeit hat man auch in der Topologie mit dieser Definition gearbeitet. Es hat sich aber schließlich gezeigt, dass die abstrakte Definition mithilfe von Überdeckungen bestimmte Vorteile hat.

Proposition 2.19. *Jede abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums ist kompakt.*

Beweis. Es sei X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen. Ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von A , dann setze $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$. Nun ist \mathcal{V} eine offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, besitzt \mathcal{V} eine endliche Teilüberdeckung \mathcal{V}' . Dann ist $\mathcal{U}' = \mathcal{V}' \setminus \{X \setminus A\}$ eine endliche Teilmenge von \mathcal{U} , die A überdeckt. \square

Proposition 2.20. *Es sei X ein Hausdorff-Raum. Ist C eine kompakte Teilmenge von X und $x_0 \in X$ ein Punkt, der nicht in C liegt, dann gibt es disjunkte offene Mengen U und V in X mit $x_0 \in U$ und $C \subset V$.*

Beweis. Wähle zu jedem Punkt $y \in C$ zwei disjunkte Umgebungen U_y bzw. V_y von x_0 bzw. y . Dann ist $\mathcal{V} = \{V_y \mid y \in C\}$ eine offene Überdeckung von C . Da C kompakt ist, gibt es also endlich viele Punkte y_1, \dots, y_n derart, dass C in der offenen Menge $V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$ enthalten ist. Die offene Menge $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ ist disjunkt zu V und enthält x_0 , wie gewünscht. \square

Übung 2.15. Es sei X ein Hausdorff-Raum und seien A und B disjunkte kompakte Teilmengen. Zeige, dass A und B disjunkte Umgebungen in X besitzen.

Korollar 2.21. *Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raums ist abgeschlossen.*

¹Genauer wäre: „Eine Überdeckung durch offene Mengen“, denn nicht die Überdeckung selbst ist offen. Diese Vermengung der Ebenen ist aber gebräuchlich und weniger umständlich.

²Es ist in der Literatur verbreitet (z.B. bei Bourbaki), hier **quasikompakt** statt **kompakt** zu sagen. Damit sich ein Raum kompakt nennen darf, muss dann noch die Hausdorff-Eigenschaft hinzutreten.

Beweis. Es sei X ein Hausdorff-Raum und sei $C \subset X$ kompakt. Das vorangehende Lemma zeigt dann, dass jeder Punkt in $X \setminus C$ eine Umgebung besitzt, die in $X \setminus C$ enthalten ist. Also ist $X \setminus C$ offen und damit C abgeschlossen. \square

Proposition 2.22. *Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.*

Beweis. Es sei $f: X \rightarrow Y$ stetig und X kompakt. Es sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von $f(X)$ in Y . Dann ist $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ eine offene Überdeckung von X , besitzt also eine endliche Teilüberdeckung $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)\}$. Damit ist $\{U_1, \dots, U_n\}$ eine endliche Teilüberdeckung von \mathcal{U} . Also ist $f(X)$ kompakt. \square

Zusammen implizieren die vorangehenden Aussagen den folgenden schönen Satz.

Satz 2.23. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Bijektion. Ist X kompakt und Y ein Hausdorff-Raum, so ist f ein Homöomorphismus.*

Insbesondere ist also jede stetige Bijektion zwischen kompakten Hausdorff-Räumen ein Homöomorphismus.

Beweis. Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A kompakt nach Prop. 2.19. Nach Prop. 2.22 ist außerdem $f(A)$ kompakt und damit abgeschlossen in Y nach Prop. 2.20. Dies zeigt, dass die Umkehrabbildung von f stetig ist. \square

Satz 2.24. *Das Produkt endlich vieler kompakter Räume ist kompakt.*

Wir beweisen zunächst das folgende Lemma.

Lemma 2.25 (Schlauchlemma). *Seien X, Y zwei Räume und sei Y kompakt. Sei $x_0 \in X$. Ist N eine offene Teilmenge von $X \times Y$ mit $\{x_0\} \times Y \subset N$, so gibt es eine Umgebung W von x_0 in X derart, dass N den „Schlauch“ $W \times Y$ enthält.*

Beweis des Lemmas. Da N offen ist, können wir nach Definition der Produkttopologie eine offene Überdeckung \mathcal{U} von $\{x_0\} \times Y$ aus Mengen der Form $U \times V$ mit $U \subset X$, $V \subset Y$ offen und $U \times V \subset N$ wählen. Da $\{x_0\} \times Y$ homöomorph zu Y ist und damit kompakt, gibt es also endlich viele offene Mengen $U_1, \dots, U_n \subset X$, $V_1, \dots, V_n \subset Y$ derart, dass

$$U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$$

eine offene Überdeckung von $\{x_0\} \times Y$ in N ist. Dabei können wir $x_0 \in U_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ annehmen. (Ist $x_0 \notin U_i$, so können wir die Menge $U_i \times V_i$ bei der Überdeckung von $\{x_0\} \times Y$ einfach weglassen.) Setze $W = U_1 \cap \dots \cap U_n$. Dann ist W offen und enthält x_0 . Sei nun $(x, y) \in W \times Y$. Dann gilt $(x_0, y) \in U_i \times V_i$ für einen Index i und damit $y \in V_i$. Außerdem gilt $x \in W \subset U_i$ und damit $(x, y) \in U_i \times V_i$. Dies zeigt

$$W \times Y \subset \bigcup_{i=1}^n (U_i \times V_i) \subset N$$

und das Lemma ist bewiesen. \square

Beweis von Satz 2.24. Nach Induktion genügt es zu zeigen, dass das Produkt $X \times Y$ zweier kompakter Räume X und Y kompakt ist. Es sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Für festes $x_0 \in X$ ist $\{x_0\} \times Y$ kompakt und wird daher von einer endlichen Teilmenge $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ überdeckt. Die Vereinigung $N = \bigcup \mathcal{U}'$ ist also eine Umgebung von $\{x_0\} \times Y$ und enthält damit nach dem Schlauchlemma eine Menge der Form $W \times Y$, wobei W eine Umgebung von x_0 in X ist.

Wir können also zu jedem $x \in X$ eine Umgebung W_x finden derart, dass der Schlauch $W_x \times Y$ von endlich vielen Elementen von \mathcal{U} überdeckt wird. Andererseits ist $\{W_x \mid x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X und besitzt damit eine endliche Teilüberdeckung $\{W_{x_1}, \dots, W_{x_n}\}$. Insgesamt wird $X \times Y$ von den Mengen

$$W_{x_1} \times Y, \dots, W_{x_n} \times Y$$

überdeckt. Eine jede von diesen wird von endlich vielen Elementen von \mathcal{U} überdeckt. Also besitzt \mathcal{U} insgesamt eine endliche Teilüberdeckung. \square

Übung 2.16. Es seien \mathcal{T} und \mathcal{T}' zwei Topologien auf einer Menge X . Zeige: Wenn X mit beiden Topologien ein kompakter Hausdorff-Raum ist, dann sind \mathcal{T} und \mathcal{T}' entweder gleich oder nicht vergleichbar.

Übung 2.17. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, wobei X kompakt sei und Y ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass f eine abgeschlossene Abbildung ist.

Übung 2.18. Es sei $p: X \rightarrow Y$ abgeschlossen, stetig und surjektiv. Ferner sei $p^{-1}(y)$ kompakt für alle $y \in Y$. Zeige: Ist Y kompakt, so auch X .

Übung 2.19. Es seien X und Y topologische Räume.

- Zeige: Ist Y kompakt, so ist die Projektion $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x$, auf den ersten Faktor eine abgeschlossene Abbildung.
- Gib ein Beispiel einer abgeschlossenen Teilmenge in \mathbb{R}^2 , deren Projektion auf die horizontale Achse nicht abgeschlossen ist.

Übung 2.20. Sei X ein topologischer Raum und Y ein kompakter Hausdorff-Raum. Zeige, dass eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann stetig ist, wenn der **Graph von f**

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

in $X \times Y$ abgeschlossen ist.

2.4. DIE PRODUKTTPOLOGIE

Bislang haben wir die Produkttopologie nur für endliche kartesische Produkte topologischer Räume betrachtet. Jetzt befassen wir uns mit dem allgemeinen Fall. Sei I eine Menge und $(X_\alpha) = (X_\alpha \mid \alpha \in I)$ eine Familie von Räumen. Wir möchten das kartesische Produkt

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

mit einer Topologie versehen. Die direkte Verallgemeinerung vom endlichen Fall führt auf die Topologie erzeugt von der Basis

$$\left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha \subset X_\alpha \text{ offen für alle } \alpha \in I \right\}.$$

Die so erzeugte Topologie heißt die **Boxtopologie**. Dies ist aber *nicht* die Produkt-Topologie. Stattdessen nimmt man dafür die Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid \begin{array}{l} U_\alpha \subset X_\alpha \text{ offen für alle } \alpha \in I \text{ und} \\ U_\alpha = X_\alpha \text{ für alle bis auf endlich viele } \alpha \in I \end{array} \right\}.$$

Übung 2.21. Zeige, dass \mathcal{B} die Axiome einer Basis erfüllt.

Übung 2.22. Es sei $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Räumen und $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Für jedes $\alpha \in I$ sei $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ die Projektion $(x_\alpha) \mapsto x_\alpha$. Zeige, dass die Menge

$$\mathcal{S} = \left\{ \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in I \text{ und } U_\alpha \subset X_\alpha \text{ offen} \right\}$$

eine Subbasis für die Produkttopologie auf X ist.

Die von \mathcal{B} erzeugte Topologie ist dann tatsächlich die **Produkttopologie** auf X und wir nennen X auch kurz das **Produkt** der Familie (X_α) . Per Definition gelten:

- (1) Die Boxtopologie ist feiner als die Produkttopologie.
- (2) Für endliche kartesische Produkte stimmen die Boxtopologie und die Produkttopologie überein.

Die Frage, die sich bei dieser Definition noch dringender stellt als bei vielen anderen, ist: Warum so und nicht anders? Warum zum Beispiel nimmt man nicht immer die Boxtopologie? Darauf gibt es mehrere Antworten, aber insgesamt hat die Produkttopologie einfach bessere Eigenschaften als die Boxtopologie. Das sieht man etwa an Zusammenhang und Kompaktheit: In Beispiel 2.7 haben wir gesehen, dass das Produkt zusammenhängender Räume in der Boxtopologie nicht zusammenhängend sein muss. In der Produkttopologie passiert das nicht.

Satz 2.26. *Das Produkt zusammenhängender Räume ist zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ und sei $a = (a_\alpha) \in X$ ein Punkt. Für jede endliche Teilmenge $K \subset I$ setze

$$X_K = \left\{ (x_\alpha) \mid x_\alpha = a_\alpha \text{ für alle } \alpha \notin K \right\}.$$

Dann ist X_K zusammenhängend, denn es ist homöomorph zu einem endlichen Produkt zusammenhängender Räume und damit zusammenhängend (Satz 2.6). Nach Lemma 2.5 ist dann auch die Vereinigung

$$Y = \bigcup \{ X_K \mid K \subset I \text{ endlich} \}$$

zusammenhängend. Nun gilt $X = \overline{Y}$ nach Definition der Produkttopologie. Denn ist $x = (x_\alpha) \in X$ ein Punkt und U eine Umgebung von x , so besitzt x eine Umgebung

der Form $V = \times_{\alpha \in I} V_\alpha$ mit $V_\alpha \subset X_\alpha$ offen für alle $\alpha \in I$ und $V_\alpha = X_\alpha$ für alle bis auf endlich viele $\alpha \in I$, mit $V \subset U$. Ist K die Menge aller Indizes α mit $V_\alpha \neq X_\alpha$, so gilt $V \cap X_K \neq \emptyset$. Also ist X der Abschluss einer zusammenhängenden Menge und damit zusammenhängend (Lemma 2.4). \square

Bedeutend schwieriger, da nicht auf einfache Weise auf den endlichen Fall reduzierbar, ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 2.27 (Tychonoff). *Das Produkt kompakter Räume ist kompakt.*

Den Beweis werden wir in der Vorlesung überspringen. Er ist aber für Interessierte im folgenden Abschnitt kurz dargestellt.

2.5. BEWEIS DES SATZES VON TYCHONOFF

Wir zeigen hier kurz und knapp den Beweis des Satzes von Tychonoff. Interessant dazu ist auch die Einleitung in Kapitel 5 von [Mu]. Dort werden mehrere Beweisansätze diskutiert, die auch den letztlich gewählten Weg motivieren.

Zunächst bemerken wir, dass man Kompaktheit, als eine bestimmte Aussage über offene Überdeckungen in topologischen Räumen, auch durch geschickte Komplementbildung mithilfe von abgeschlossenen Mengen ausdrücken kann. Die Formulierung sieht allerdings etwas weniger natürlich aus.

Lemma 2.28. *Ein topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn folgendes gilt: Ist \mathcal{C} eine Menge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$, so gibt es eine endliche Teilmenge \mathcal{C}' von \mathcal{C} mit $\bigcap \mathcal{C}' = \emptyset$.*

In einem nicht-kompakten Raum ist die Folgerung im Satz offenbar falsch. Ist z.B. $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{C} = \{[n, \infty) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ so gilt offenbar $\bigcap \mathcal{C}' \neq \emptyset$ für jede endliche Teilmenge $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, aber dennoch $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$.

Beweis. Man muss nur die Definition von Kompaktheit umformen. Es sei \mathcal{C} eine Menge von abgeschlossenen Mengen und für jede Teilmenge \mathcal{C}' von \mathcal{C} setze

$$\mathcal{U}' = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{C}'\}.$$

Dann ist \mathcal{U}' eine Menge von offenen Mengen und es gilt

$$X \setminus \left(\bigcup \mathcal{U}'\right) = \bigcap \mathcal{C}'.$$

Umgekehrt bildet man zu jeder Menge \mathcal{U} von offenen Mengen eine entsprechende Menge \mathcal{C} von abgeschlossenen.

Sei nun X kompakt und \mathcal{C} eine Menge von abgeschlossenen Mengen. Falls $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$, dann ist \mathcal{U} eine Überdeckung von X und besitzt daher eine endliche Teilüberdeckung \mathcal{U}' . Dann gilt $\mathcal{C}' = \emptyset$. Für die umgekehrte Richtung, sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Dann gilt $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$ und nach Voraussetzung gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ mit $\bigcap \mathcal{C}' = \emptyset$, und \mathcal{U}' ist eine endliche Teilüberdeckung von \mathcal{U} . \square

Der Beweis des Satzes von Tychonoff benutzt das Zornsche Lemma, das aus der Algebra bekannt ist.

Lemma (Zornsches Lemma). *Es sei M eine partiell geordnete Menge. Falls jede total geordnete Teilmenge in M (jede Kette) eine obere Schranke in M besitzt, dann existiert in M ein maximales Element.* \square

Dabei ist ein maximales Element ein Element, das in der partiellen Ordnung von M von keinem anderen Element majorisiert wird.

Im folgenden verwenden wir zur Abkürzung folgende Sprechweise: Ist \mathcal{C} eine Menge von Teilmengen von X derart, dass $\bigcap \mathcal{C}' \neq \emptyset$ für jede endliche Teilmenge $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ gilt, dann sagen wir, \mathcal{C} habe die **endliche Schnitteigenschaft**.

Lemma 2.29. *Es sei X eine Menge und \mathcal{C} eine Menge von Teilmengen mit der endlichen Schnitteigenschaft. Dann gibt es eine maximale Erweiterung von \mathcal{C} mit der endlichen Schnitteigenschaft. Das heißt, es gibt eine Menge \mathcal{D} von Teilmengen von X mit $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, die die endliche Schnitteigenschaft besitzt und derart, dass dies für keine echte Obermenge von \mathcal{D} in $\mathcal{P}(X)$ der Fall ist.*

Beweis. Wir verwenden das Zornsche Lemma, angewandt auf Mengen von Mengen von Teilmengen (sic!) von X . Die einzige Schwierigkeit in diesem Beweis besteht darin, die drei logischen Ebenen (Teilmengen von X , $\mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$) auseinander zu halten. Es sei

$$\mathbb{A} = \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \text{ und } \mathcal{A} \text{ besitzt die endliche Schnitteigenschaft} \}.$$

Die Menge \mathbb{A} ist durch Inklusion partiell geordnet. Wir wollen zeigen, dass \mathbb{A} ein bezüglich Inklusion maximales Element besitzt. Um das Zornsche Lemma anzuwenden, müssen wir zeigen: Ist \mathbb{B} eine total geordnete Teilmenge von \mathbb{A} , so besitzt \mathbb{B} eine obere Schranke in \mathbb{A} . Setze dazu

$$\mathcal{B} = \bigcup \mathbb{B}.$$

Es genügt zu zeigen, dass \mathcal{B} in \mathbb{A} liegt, denn dann ist \mathcal{B} sicher eine obere Schranke von \mathbb{B} in \mathbb{A} . Dazu müssen wir zeigen, dass $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ gilt und dass \mathcal{B} die endliche Schnitteigenschaft besitzt. Da \mathcal{C} in jedem Element von \mathbb{B} enthalten ist, gilt sicher $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Seien $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$. Wegen $\mathcal{B} = \bigcup \mathbb{B}$ gibt es zu jedem Index i ein Element $\mathcal{B}_i \in \mathbb{B}$ mit $B_i \in \mathcal{B}_i$. Die Menge $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n\}$ ist dann eine endliche Teilmenge von \mathbb{B} und damit total geordnet. Da diese Menge endlich ist, besitzt sie ein größtes Element, d.h. es gibt einen Index k mit $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_k$ für alle $i = 1, \dots, n$. Es folgt $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_k$. Da \mathcal{B}_k die endliche Schnitteigenschaft besitzt, gilt $B_1 \cap \dots \cap B_n \neq \emptyset$. Damit ist gezeigt, dass \mathcal{B} eine obere Schranke von \mathbb{B} ist. Nach dem Zornschen Lemma existiert also ein maximales Element in \mathbb{A} . \square

Lemma 2.30. *Es sei X eine Menge und sei \mathcal{D} eine Menge von Teilmengen von X die maximal ist bezüglich der endlichen Schnitteigenschaft (wie in Lemma 2.29). Es gelten:*

- (1) Jeder endliche Durchschnitt von Elementen in \mathcal{D} ist ein Element von \mathcal{D} .
 (2) Ist A eine Teilmenge von X , die jedes Element von \mathcal{D} schneidet, dann ist A ein Element von \mathcal{D} .

Beweis. (1) Es sei $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ endlich und sei $B = \bigcap \mathcal{D}'$. Setze $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{B\}$. Es genügt zu zeigen, dass \mathcal{E} die endliche Schnitteigenschaft besitzt; denn dann folgt $\mathcal{E} = \mathcal{D}$ nach Maximalität von \mathcal{D} . Seien dazu $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$. Falls keine dieser Mengen gleich B ist, so folgt $E_1 \cap \dots \cap E_n \neq \emptyset$, da \mathcal{D} die endliche Schnitteigenschaft besitzt. Ist eine von ihnen gleich B , etwa E_n , so hat der Durchschnitt die Form $E_1 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap B$ und ist damit nicht-leer, da B selbst ein Durchschnitt von Elementen in \mathcal{D} ist.

(2) Setze wieder $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{A\}$ und zeige, dass \mathcal{E} die endliche Schnitteigenschaft besitzt. Seien $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$. Falls A nicht dabei ist, so ist nichts zu zeigen. Ist andererseits etwa $E_n = A$, so ist $E_1 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap A$ nicht-leer, nach Voraussetzung. \square

Nun sind wir bereit für den eigentlichen Beweis.

Satz (Tychonoff). *Das Produkt kompakter Räume ist kompakt.*

Beweis. Es sei (X_α) eine Familie kompakter Räume und sei $X = \times_\alpha X_\alpha$. Sei \mathcal{A} eine Menge von Teilmengen mit der endlichen Schnitteigenschaft. Dann zeigen wir

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A} \neq \emptyset.$$

Die Kompaktheit von X folgt dann aus Lemma 2.28. Nach Lemma 2.29 gibt es eine maximale Menge von Teilmengen \mathcal{D} mit der endlichen Schnitteigenschaft, die \bar{A} enthält. Es genügt $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D} \neq \emptyset$ zu zeigen. Für jeden Index α sei $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ die Projektion $(x_\alpha) \mapsto x_\alpha$. Betrachte die Menge von Teilmengen $\{\pi_\alpha(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$ von X_α . Diese Menge erbt von \mathcal{D} die endliche Schnitteigenschaft. Da X_α kompakt ist, gibt es für jedes α ein $x_\alpha \in X_\alpha$ mit

$$x_\alpha \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)}.$$

Setze $x = (x_\alpha) \in X$. Wir zeigen, dass $x \in \bar{D}$ für alle $D \in \mathcal{D}$ gilt. Dazu zeigen wir folgendes: Ist $U_\alpha \subset X_\alpha$ offen mit $x_\alpha \in U_\alpha$, so gilt $\overline{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} \cap D \neq \emptyset$ für alle $D \in \mathcal{D}$. Denn U_α ist eine Umgebung von x_α in X_α . Da $x_\alpha \in \overline{\pi_\alpha(D)}$ nach Definition gilt, gibt es $y \in D$ mit $\pi_\alpha(y) \in U_\alpha$ und daher $y \in \overline{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} \cap D$.

Aus Lemma 2.30(2) folgt nun, dass $\overline{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} \in \mathcal{D}$ gilt, sobald $x_\alpha \in U_\alpha$. Da die Mengen $\overline{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)}$ eine Subbasis für die Produkttopologie bilden (Aufgabe 1.16) und jede Basismenge ein endlicher Durchschnitt von Subbasismengen ist, enthält \mathcal{D} also jede Basismenge der Produkttopologie, die x enthält. Da \mathcal{D} die endliche Schnitteigenschaft besitzt, bedeutet dies, dass jede Basismenge, die x enthält, jedes Element von \mathcal{D} schneidet. Daraus folgt $x \in \bar{D}$ für alle $D \in \mathcal{D}$, wie behauptet. \square

3. QUOTIENTEN

3.1. INITIAL- UND FINALTOPOLOGIE

Es sei X eine Menge und $\{Y_\alpha \mid \alpha \in I\}$ eine Familie von topologischen Räumen. Gegeben eine Familie von Abbildungen $f_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha$, dann gibt es eine grösste Topologie, die alle diese Abbildungen stetig macht. Sie wird erzeugt von der Subbasis

$$\{f_\alpha^{-1}(V_\alpha) \mid \alpha \in I \text{ und } V_\alpha \subset Y_\alpha \text{ offen}\}.$$

und heisst die **Initialtopologie** auf X bezüglich der Familie $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Man überzeugt sich, dass die von dieser Subbasis erzeugte Topologie tatsächlich die grösste Topologie mit der gewünschten Eigenschaft ist. Denn per Definition sind alle Abbildungen f_α stetig bezüglich der Initialtopologie und jede Topologie auf X mit dieser Eigenschaft muss die gegebene Subbasis enthalten. In der Funktionalanalysis heisst die Initialtopologie häufig die **schwache Topologie**.

Beispiele 3.1. (1) Ist $X = \times_{\alpha \in I} X_\alpha$ das kartesische Produkt, so ist die Produkttopologie genau die Initialtopologie der Familie aller Projektionen

$$\{\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha, (x_\beta)_{\beta \in I} \mapsto x_\alpha \mid \alpha \in I\}.$$

Denn für $\alpha \in I$ und $U_\alpha \in X_\alpha$ offen ist

$$\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \times_{\beta \neq \alpha} X_\beta.$$

Diese Menge ist per Definition offen in der Produkttopologie.

(2) Auch die Teilraumtopologie kann man als Initialtopologie interpretieren. Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so ist die Teilraumtopologie gerade die Initialtopologie bezüglich der Inklusionsabbildung $Y \hookrightarrow X, y \mapsto y$.

Der duale Begriff dazu entsteht, wenn man Pfeile in die andere Richtung betrachtet. Ist $\{f_\alpha: Y_\alpha \rightarrow X\}$ eine Familie von Abbildungen, so ist die **Finaltopologie** die feinste Topologie auf X , die alle Abbildungen f_α stetig macht. Hier ist es leichter, die Topologie explizit anzugeben. In der Finaltopologie ist eine Menge $U \subset X$ genau dann offen, wenn $f_\alpha^{-1}(U)$ für alle $\alpha \in I$ offen in Y_α ist. Dafür ist es etwas schwieriger, für die Finaltopologie direkt nützliche Beispiele zu geben. Einen wichtigen Spezialfall untersuchen wir im nächsten Abschnitt.

3.2. QUOTIENTEN

Es seien X und Y zwei topologische Räume. Eine surjektive Abbildung $p: X \rightarrow Y$ heißt **Quotientenabbildung**, falls $U \subset Y$ genau dann offen in Y ist, wenn $p^{-1}(U)$ offen in X ist, also genau dann, wenn Y die Finaltopologie bezüglich p trägt. In dieser Situation heißt Y ein **Quotient**.

Ist $p: X \rightarrow Y$ eine stetige Surjektion, die außerdem offen oder abgeschlossen ist, so ist p eine Quotientenabbildung. Allerdings braucht eine Quotientenabbildung im allgemeinen weder offen noch abgeschlossen zu sein (siehe Beispiel 3.2(1)). Die Unterscheidung zwischen einer Quotientenabbildung und einer offenen stetigen Surjektion ist etwas subtil: Bei einer offenen Abbildung ist das Bild jeder offenen Menge offen. Bei einer Quotientenabbildung wird das nur für solche offenen Mengen verlangt, die das volle Urbild einer Teilmenge von Y sind. Dazu ist folgende Terminologie hilfreich. Eine Teilmenge M von X heißt **p -saturiert**, wenn $p^{-1}(p(M)) = M$ gilt. Äquivalent ist, dass M jede Faser $p^{-1}(y)$, $y \in Y$ entweder enthält oder nicht schneidet. Eine Quotientenabbildung ist also eine stetige Surjektion die offene saturierte Mengen auf offene Mengen abbildet. (Äquivalent: eine stetige Surjektion, die abgeschlossene saturierte Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet.)

Beispiele 3.2. (1) Es sei X die Menge $[0, 1] \cup [2, 3]$ als Teilraum von \mathbb{R} und sei $Y = [0, 2]$. Die Abbildung

$$p(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 1], \\ x - 1 & \text{für } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

ist stetig, surjektiv und abgeschlossen und daher eine Quotientenabbildung. Sie ist aber nicht offen, denn die Menge $[0, 1]$ ist offen in X aber nicht in Y . Beachte, dass $[0, 1]$ gerade nicht p -saturiert ist. Es gilt nämlich $p^{-1}(p[0, 1]) = [0, 1] \cup \{2\}$. Diesen Defekt könnte man beheben, indem man den störenden Punkt $\{2\}$ herausnimmt. Das Intervall $[0, 1]$ ist dann p_0 -saturiert. Aber p_0 ist keine Quotientenabbildung, denn $[0, 1] = p_0^{-1}(p_0[0, 1])$ ist offen in $[0, 1] \cup (2, 3]$, aber nicht in Y .

(2) Es sei $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste Koordinate. Sie ist stetig und surjektiv. Sie ist auch offen (denn das Bild einer offenen Basismenge ist offen) aber nicht abgeschlossen (Aufgabe 2.19(b)).

(3) Es sei $A = \{a, b, c\}$ eine Menge mit drei Elementen und

$$p: \mathbb{R} \rightarrow A, x \mapsto \begin{cases} a & \text{für } x > 0 \\ b & \text{für } x < 0 \\ c & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Wir bestimmen die Quotiententopologie auf A bezüglich p . Die Mengen $p^{-1}(a) = (0, \infty)$ und $p^{-1}(b) = (-\infty, 0)$ sind offen in \mathbb{R} , also sind $\{a\}$ und $\{b\}$ offen in der Quotiententopologie. Damit ist auch $\{a, b\}$ offen. Zusammen mit A und \emptyset sind das alle offenen Teilmengen von A . (Zum Beispiel ist $p^{-1}(\{a, c\}) = [0, \infty)$ nicht offen in \mathbb{R}). Der resultierende dreipunktige Raum ist in Abb. 1 dargestellt.

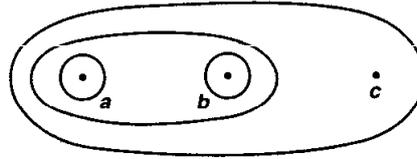


ABBILDUNG 1. [Mu, Fig. 22.3]

Übung 3.1. Es sei $\pi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste Koordinate. Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ oder } y = 0\}$ und sei $q = \pi|_A$. Zeige, dass q eine Quotientenabbildung ist, die weder offen noch abgeschlossen ist.

Die Quotiententopologie kommt regelmäßig in der folgenden Situation zum Einsatz: Sei X ein Raum, \sim eine Äquivalenzrelation auf X und X^* die Menge der Äquivalenzklassen. Für $x \in X$ bezeichne $[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$ die zugehörige Äquivalenzklasse. Beachte, dass eine Äquivalenzrelation auf X nichts anderes ist als eine Zerlegung von X in disjunkte Teilmengen, nämlich die Äquivalenzklassen. Setze $p: X \rightarrow X^*$, $x \mapsto [x]$. Die Menge X^* versehen mit der Quotiententopologie bezüglich p heißt der **Quotient von X bezüglich \sim** . Da äquivalente Punkte miteinander identifiziert werden, also das gleiche Bild in X^* haben, nennt man den Quotient auch **Identifikationsraum**.

Besonders wichtig ist der Fall, dass $A \subset X$ eine Teilmenge ist und in der Relation genau alle Punkte von A äquivalent sind. Das heißt, es gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x, y \in A$. Im Quotient kollabiert dann die Teilmenge A auf einen Punkt.

Beispiele 3.3. (1) Es sei X die abgeschlossene Kreisscheibe

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

in der reellen Ebene. Sei \sim die Äquivalenzrelation, die die Randpunkte auf dem Einheitskreis miteinander identifiziert. Die Äquivalenzklassen bestehen also aus den einzelnen Punkten in der offenen Kreisscheibe und dem Rand, oder explizit:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x = y \text{ oder } x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = 1)$$

Der Quotient X^* ist homöomorph zur 2-Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Die geometrische Anschauung dazu ist äußerst suggestiv, aber schwer in Worte zu fassen. Zunächst wird die offene Kreisscheibe etwa mit der Menge $S^2 \setminus \{P\}$, $P = (0, 0, 1)$ identifiziert (durch „Aufbiegen“). Dann bildet man die nicht-triviale Äquivalenzklasse von X , also den Rand, auf P ab. (Abbildung 2 hilft, sich diese Identifikation richtig vorzustellen). Diese Argumentation erscheint etwas vage. Es ist mühsam, aber keineswegs unmöglich, den Homöomorphismus von X^* mit S^2 explizit hinzuschreiben und alles nachzurechnen (siehe Aufgabe 3.2).

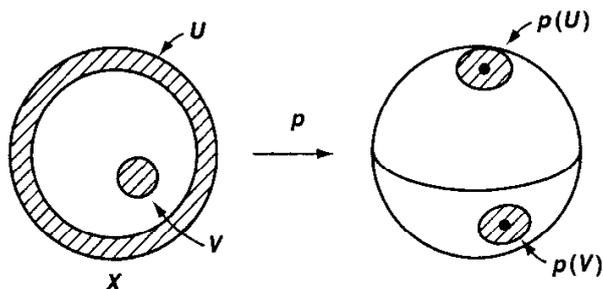


ABBILDUNG 2. [Mu, Fig. 22.4]

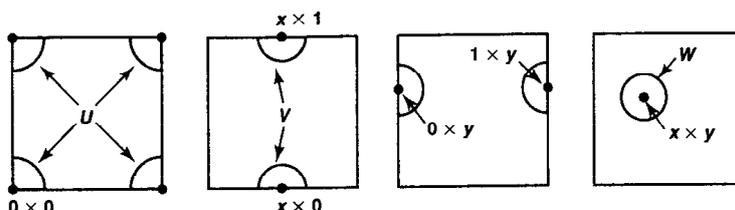


Figure 22.5

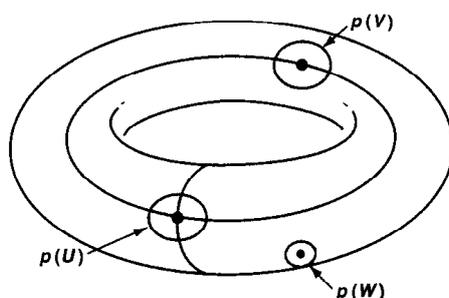


ABBILDUNG 3. [Mu, Fig. 22.5, 22.6]

(2) Es sei $X = [0,1] \times [0,1]$. Wir nehmen auf dem Rand dieses Rechtecks die folgenden Identifikationen vor:

$$\begin{aligned} (x, 0) &\sim (x, 1), \quad x \in (0, 1) \\ (0, y) &\sim (1, y), \quad y \in (0, 1) \\ (0, 0) &\sim (0, 1) \sim (1, 0) \sim (1, 1). \end{aligned}$$

Alle übrigen Punkte seien nur zu sich selbst äquivalent. Im Quotienten werden die Seiten des Rechtecks zusammengeklebt und es entsteht...der Torus! Das sieht man diesmal wirklich besser im Bild, als durch Rechnung (Abb. 3). (Rechnen ist deswegen natürlich nicht verboten.)

Übung 3.2. Beweise die Behauptung in Beispiel 3.3(1) durch Angabe eines expliziten Homöomorphismus.

Übung 3.3. (a) Definiere eine Äquivalenzrelation auf $X = \mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \iff x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2.$$

Der zugehörige Quotient X^* ist zu einem vertrauten topologischen Raum homöomorph. Welcher Raum ist das?

(b) Beantworte dieselbe Frage für die Äquivalenzrelation

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \iff x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

Nach diesen erfrischenden Beispielen beweisen wir nun einige formale Eigenschaften von Quotienten in der Topologie.

Proposition 3.4. *Es sei $p: X \rightarrow Y$ eine Quotientenabbildung und sei A ein p -saturierter Unterraum von X . Sei $q: A \rightarrow p(A)$ die Einschränkung von p auf A . Es gelte einer der folgenden Bedingungen.*

- (1) A ist offen oder abgeschlossen;
- (2) p ist eine offene oder abgeschlossene Abbildung.

Dann ist q eine Quotientenabbildung.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass die folgenden Gleichheiten gelten:

$$\begin{aligned} q^{-1}(V) &= p^{-1}(V) && \text{für alle Teilmengen } V \subset p(A); \\ p(U \cap A) &= p(U) \cap p(A) && \text{für alle Teilmengen } U \subset X. \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit folgt direkt aus der p -Saturiertheit von A . Bei der zweiten Gleichheit gilt die Inklusion $p(U \cap A) \subset p(U) \cap p(A)$ sowieso. Für die andere Inklusion, sei $y = p(u) = p(a)$ mit $u \in U$ und $a \in A$. Da A saturiert ist, gilt $p^{-1}(p(a)) \subset A$ und damit $u \in A$. Also $y = p(u) \in p(U \cap A)$.

Sei nun A offen oder p offen. Gegeben sei eine Teilmenge V von $p(A)$ derart, dass $q^{-1}(V)$ offen in A ist. Wir müssen zeigen, dass V offen in $p(A)$ ist.

Sei zunächst A offen. Da $q^{-1}(V)$ offen in A ist und A offen in X , ist dann $q^{-1}(V)$ offen in X . Da $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$ und p eine Quotientenabbildung ist, ist dann V offen in Y und insbesondere in $p(A)$.

Sei nun p offen, A beliebig. Da $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$ offen in A ist, gibt es eine offene Teilmenge U von X mit $p^{-1}(V) = U \cap A$. Es folgt

$$V = p(p^{-1}(V)) = p(U \cap A) = p(U) \cap p(A).$$

(Die erste Gleichheit gilt einfach, weil p surjektiv ist.) Da p eine offene Abbildung ist, ist $p(U)$ offen. Also ist V offen in A .

Der Fall, dass A oder p abgeschlossen ist, geht völlig analog. □

Die folgende wichtige Aussage erklärt den Namen „Quotient“, denn sie ist analog zu entsprechenden Aussagen in der Algebra, etwa für eine Gruppe modulo Normalteiler oder einen Ring modulo einem Ideal.

Satz 3.5. *Es sei $p: X \rightarrow Y$ eine Quotientenabbildung. Es sei Z ein topologischer Raum und $g: X \rightarrow Z$ eine Abbildung, die auf allen Fasern $p^{-1}(y)$, $y \in Y$ konstant ist. Dann gibt es eine Abbildung $f: Y \rightarrow Z$ mit $f \circ p = g$. Die induzierte Abbildung f ist genau dann stetig, wenn g stetig ist und genau dann eine Quotientenabbildung, wenn g eine Quotientenabbildung ist.*

Beweis. Für $y \in Y$ wähle $x \in p^{-1}(y)$ und setze $f(y) = g(x)$. Da g auf den Fasern von p konstant ist, hängt diese Definition nicht von der Wahl von x ab und es gilt $f \circ p = g$. Ist f stetig, so auch $f \circ p$. Ist umgekehrt g stetig und V eine offene Teilmenge von Z , so ist $g^{-1}(V)$ offen in X . Andererseits gilt $g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$ und da p eine Quotientenabbildung ist, ist damit $f^{-1}(V)$ offen. Also ist f stetig.

Falls f eine Quotientenabbildung ist, so ist g die Komposition zweier Quotientenabbildungen und damit wieder eine, wie man leicht sieht. Sei umgekehrt g eine Quotientenabbildung. Da g surjektiv ist, gilt dies auch für f . Es sei V eine Teilmenge von Z derart, dass $f^{-1}(V)$ offen ist. Da p stetig ist, ist $p^{-1}(f^{-1}(V)) = g^{-1}(V)$ offen in X und damit V offen in Z , da g eine Quotientenabbildung ist. \square

Korollar 3.6. *Es sei $g: X \rightarrow Z$ eine stetige Surjektion und sei*

$$X^* = \{g^{-1}(\{z\}) \mid z \in Z\}$$

die Menge der Fasern. (Also ist X^ die Menge der Äquivalenzklassen unter der Relation $(x \sim y) \Leftrightarrow g(x) = g(y)$.) Wir versehen X^* mit der Quotiententopologie.*

(1) *Die Abbildung g induziert eine stetige Bijektion $f: X^* \rightarrow Z$ mit $f([x]) = g(x)$, die genau dann ein Homöomorphismus ist, wenn g eine Quotientenabbildung ist.*

(2) *Ist Z ein Hausdorffraum, so auch X^* .*

Beweis. (1) Nach dem vorangehenden Satz induziert g eine stetige Abbildung $f: X^* \rightarrow Z$. Es ist klar nach Definition, dass f bijektiv ist. Angenommen, f ist ein Homöomorphismus. Dann sind sowohl f als auch die Abbildung $p: X \rightarrow X^*$, $x \mapsto [x] = g^{-1}(g(x))$ Quotientenabbildungen. Also ist auch $g = f \circ p$ eine Quotientenabbildung. Ist umgekehrt g eine Quotientenabbildung, dann ist f nach obigem Satz eine Quotientenabbildung. Da f bijektiv ist, ist es dann ein Homöomorphismus.

(2) Angenommen, Z ist ein Hausdorffraum. Sind $[x], [y] \in X^*$ zwei verschiedene Punkte, so folgt $f([x]) \neq f([y])$. Diese beiden Punkte besitzen also disjunkte Umgebungen U und V , so dass $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ disjunkte Umgebungen von $[x]$ und $[y]$ in X^* sind. \square

Die Frage, wann ein Quotient eines Hausdorffraums wieder ein Hausdorffraum ist (die Umkehrung zu (2) im Korollar), ist subtiler (siehe auch Aufg. 3.5).

Beispiele 3.7. (1) Es sei X die Vereinigung aller Geradensegmente der Form $[0, 1] \times \{n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, in \mathbb{R}^2 . Sei Z die Menge aller Punkte der Form $(x, x/n)$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{Z}$. Also ist X eine abzählbare Vereinigung disjunkter Geradensegmente, während Z eine abzählbare Vereinigung von Geradensegmenten mit einem gemeinsamen Endpunkt ist (siehe Abb. 4). Wir definieren eine stetige Surjektion

$$g: \begin{cases} X & \rightarrow & Z \\ (x, n) & \mapsto & (x, x/n) \end{cases} .$$

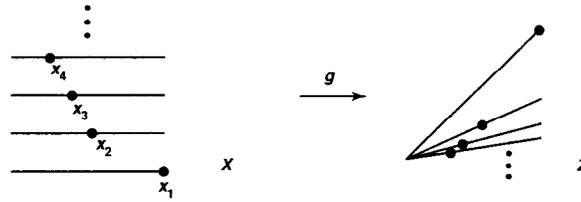


ABBILDUNG 4. [Mu, Fig. 22.7]

Der Quotient X^* bezüglich g , dessen Elemente die Fasern $g^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{R}^2$ sind, entsteht aus X , indem man die Punkte der Form $(0, n)$, $n \in \mathbb{Z}$ miteinander identifiziert. Nach Kor. 3.6 induziert g eine stetige Bijektion $f: X^* \rightarrow Z$. Diese ist jedoch *kein* Homöomorphismus. Um das zu sehen, betrachte die Folge $x_n = (1/n, n)$ in X . Die Menge $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ aller Folgenglieder ist abgeschlossen in X , denn sie besitzt keine Häufungspunkte. Sie ist auch saturiert. Dagegen ist $g(A)$ nicht abgeschlossen, denn $g(A) = \{(1/n, 1/n^2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ hat den Häufungspunkt $(0, 0)$ in Z .

Intuitiv kann man sich die Menge X^* so vorstellen, dass zwar die Endpunkte der Segmente wie in Z miteinander identifiziert sind, die einzelnen Segmente aber in völlig unabhängiger Weise auf den gemeinsamen Punkt zulaufen. Man kann sich etwa zwei senkrecht aufeinander stehende Segmente in \mathbb{R}^2 , drei in \mathbb{R}^3 usw. und schließlich X^* in \mathbb{R}^N denken. In \mathbb{R}^2 ist eine solche Menge nicht zu realisieren.

(2) Hier ein Beispiel, das zeigt, dass das Produkt zweier Quotienten im allgemeinen kein Quotient ist. Es sei $X = \mathbb{R}$ und X^* der Quotient, der entsteht, wenn man alle Punkte in \mathbb{N} mit einem Punkt b identifiziert. Es sei $p: X \rightarrow X^*$ die Quotientenabbildung und $i: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ die Identität. Die Abbildung i ist (da Homöomorphismus) eine Quotientenabbildung. Wir zeigen aber, dass

$$p \times i: X \times \mathbb{Q} \rightarrow X^* \times \mathbb{Q}$$

keine Quotientenabbildung ist. Setze dafür $c_n = \sqrt{2}/n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und betrachte die beiden Geraden mit Steigung 1 und -1 durch den Punkt (n, c_n) . Sei U_n die Menge aller Punkte in $X \times \mathbb{Q}$, die oberhalb beider oder unterhalb beider Geraden liegen und ferner zwischen den beiden vertikalen Geraden $x = n - 1/4$ und $x = n + 1/4$ (siehe Abb. 5). Dann ist U_n eine offene Teilmenge von $X \times \mathbb{Q}$, die die Menge $\{n\} \times \mathbb{Q}$ enthält, da c_n nicht rational ist. Sei U die Vereinigung aller U_n , $n \in \mathbb{N}$, eine offene Teilmenge von $X \times \mathbb{Q}$. Sie ist $(p \times i)$ -saturiert, denn sie enthält $\mathbb{N} \times \{q\}$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Wir zeigen, dass $U' = (p \times i)(U)$ nicht offen in $X^* \times \mathbb{Q}$ ist.

Angenommen falsch. Da $\mathbb{N} \times \{0\}$ in U enthalten ist, liegt der Punkt $(b, 0)$ in U' . Da U' offen ist, enthält U' eine Umgebung von $(b, 0)$ der Form $W \times I_\delta$, wobei W eine Umgebung von b in X^* ist und I_δ die δ -Umgebung der 0 in \mathbb{Q} . Es folgt

$$p^{-1}(W) \times I_\delta \subset U.$$

Wähle n groß genug, damit $c_n < \delta$ gilt. Da $p^{-1}(W)$ offen in X ist und \mathbb{N} enthält, können wir $\varepsilon < 1/4$ mit $(n - \varepsilon, n + \varepsilon) \subset p^{-1}(W)$ wählen. Dann enthält U also die

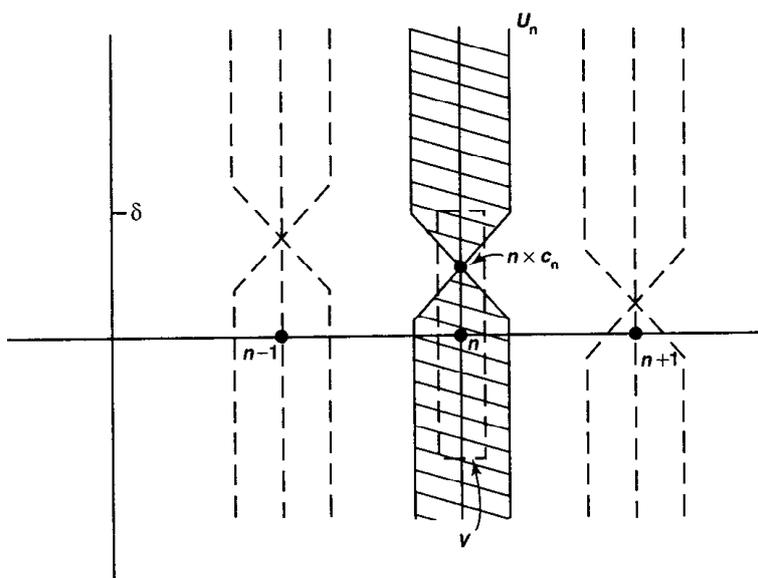


ABBILDUNG 5. [Mu, Fig. 22.8]

Menge $V = (n - \varepsilon, n + \varepsilon) \times I_\delta$. Das ist aber ganz offenbar unmöglich (wie ein Blick auf das Bild sofort zeigt). Ausreichend nah am Schnittpunkt der beiden Begrenzungsgeraden findet man immer rationale Punkte in V , die nicht in U liegen, zum Beispiel $(n + \varepsilon/2, y)$ mit $y \in \mathbb{Q}$, $|y - c_n| < \varepsilon/2$.

Übung 3.4. Seien X, Y topologische Räume.

- Es sei $p: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Zeige: Wenn es eine stetige Abbildung $f: Y \rightarrow X$ gibt derart, dass $p \circ f = \text{id}_Y$ gilt, dann ist p eine Quotientenabbildung.
- Eine **Retraktion** von X auf eine Teilmenge $A \subset X$ ist eine stetige Abbildung $r: X \rightarrow A$ mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$. Zeige, dass jede Retraktion eine Quotientenabbildung ist.

Übung 3.5. Es sei \mathbb{R}_K die reelle Gerade versehen mit der K -Topologie (siehe Aufgabe 1.14). Sei Y der Quotient, der aus \mathbb{R}_K entsteht, wenn alle Punkte von K identifiziert werden und sei $p: \mathbb{R}_K \rightarrow Y$ die zugehörige Quotientenabbildung.

- Zeige, dass alle einpunktigen Teilmengen von Y abgeschlossen sind (T_1), Y jedoch kein Hausdorffraum ist.
- Zeige, dass die Diagonale $\Delta_Y = \{(y, y) \in Y \times Y \mid y \in Y\}$ in $Y \times Y$ nicht abgeschlossen ist (siehe Aufgabe 1.25), dass aber $(p \times p)^{-1}(\Delta_Y)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}_K \times \mathbb{R}_K$ ist. Dies zeigt, dass $p \times p$ keine Quotientenabbildung ist.

4. FUNDAMENTALGRUPPE UND ÜBERLAGERUNGEN

Die Homotopietheorie ist der Ausgangspunkt der algebraischen Topologie. Darin werden topologischen Räumen algebraische Objekte (in diesem Fall Gruppen) zugeordnet. Die Zuordnung muss *funktoriell* sein, was bedeutet, dass stetige Abbildungen zwischen Räumen in sinnvoller Weise zu Homomorphismen zwischen den entsprechenden Gruppen korrespondieren. Da Gruppen in vieler Hinsicht einfacher sind als topologische Räume, hilft dies etwa dabei zu entscheiden, ob zwei topologische Räume homöomorph sind. Diesen Ansatz kann man sehr, sehr weit treiben. Die Fundamentalgruppe ist aber ein einfaches und grundlegendes Konzept, das in vielen Gebieten der Mathematik zum Einsatz kommt.

4.1. HOMOTOPIEN

Zwei stetige Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ heißen **homotop**, in Zeichen $f \simeq g$, wenn es eine stetige Abbildung $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ gibt derart, dass

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad F(x, 1) = g(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die Abbildung F heißt eine **Homotopie** zwischen f und g . Eine Abbildung, die zu einer konstanten Abbildung homotop ist, heißt **nullhomotop**.

Setze $I = [0, 1]$ und seien $x_0, x_1 \in X$. Zwei Wege $f, g: I \rightarrow X$ mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x_1 heißen **weghomotop**, in Zeichen $f \simeq_P g$, wenn es eine Homotopie gibt, die Anfangs- und Endpunkt fixiert, also eine Abbildung $F: I \times I \rightarrow X$ mit

$$\begin{aligned} F(s, 0) = f(s) & \quad \text{und} \quad F(s, 1) = g(s) \\ F(0, t) = x_0 & \quad \text{und} \quad F(1, t) = x_1 \end{aligned}$$

für alle $s, t \in I$.

Lemma 4.1. *Die Relationen \sim und \sim_P sind Äquivalenzrelationen.*

Beweis. Reflexivität ist offensichtlich. Für die Symmetrie, sei F eine Homotopie mit $F(x, 0) = f(x)$ und $F(x, 1) = g(x)$. Dann ist $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ eine Homotopie mit $G(x, 0) = g(x)$ und $G(x, 1) = f(x)$. Aus $f \simeq g$ folgt also $g \simeq f$.

Für die Transitivität, seien f, g, h Abbildungen mit $f \simeq g$ und $g \simeq h$. Sei F eine Homotopie zwischen f und g und G eine zwischen g und h . Definiere H durch

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{für } t \in [0, 1/2] \\ G(x, 2t - 1) & \text{für } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

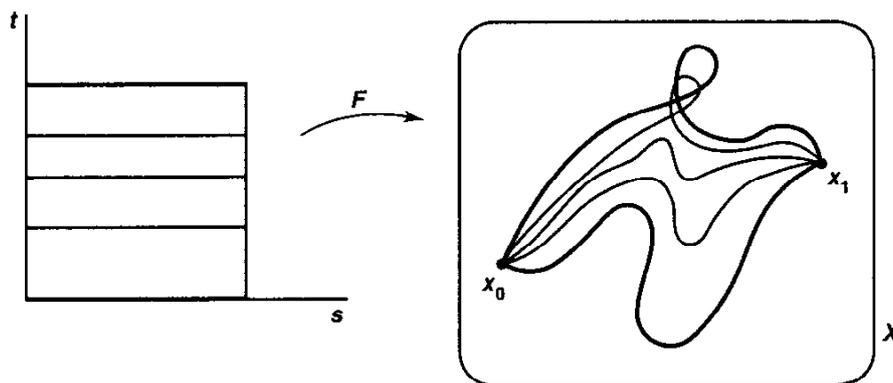


ABBILDUNG 1. Weghomotopie [Mu, Fig. 51.1]

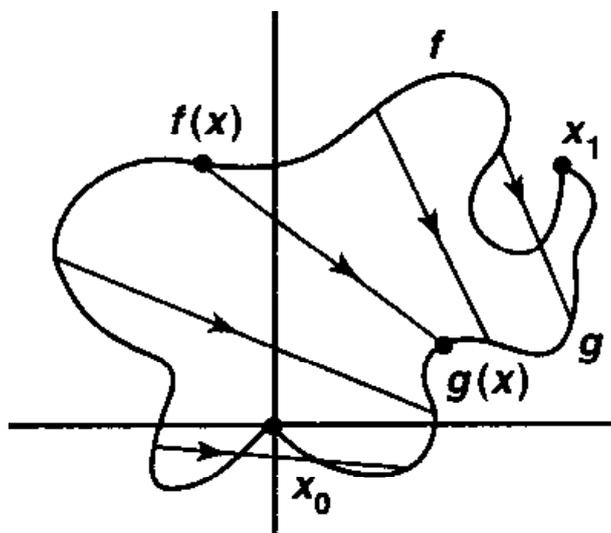


ABBILDUNG 2. [Mu, Fig. 51.3]

Dies ist wohldefiniert, denn für $t = 1/2$ gilt $F(x, 2t) = g(x) = G(x, 2t - 1)$. Ferner ist H stetig, was $f \simeq h$ zeigt. Sind F und G Weghomotopien, so auch G . \square

Beispiele 4.2. (1) Je zwei stetige Abbildungen f und g von einem Raum X nach \mathbb{R}^2 sind homotop, denn

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

ist eine Homotopie zwischen f und g (siehe Abbildung 2). Das gleiche gilt für Abbildungen mit konvexer Zielmenge.

(2) Sei $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, die **gelochte Ebene**. Die beiden Wege

$$f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s) \text{ und } g(s) = (\cos \pi s, 2 \sin \pi s)$$

in X sind weghomotop (unter der Homotopie aus (1)). Dagegen ist f nicht weghomotop zu

$$h(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$$

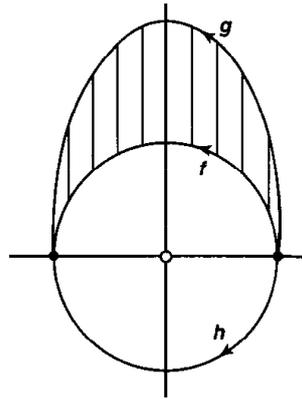


ABBILDUNG 3. [Mu, Fig. 51.4]

in X . Intuitiv ist das klar: Das Loch $(0, 0)$ ist ein unüberwindliches Hindernis (siehe Abb. 3). Ein direkter Beweis ist aber mühsam. Wir kommen später darauf zurück.

Ist f ein Weg von x_0 nach x_1 und g ein Weg von x_1 nach x_2 in X , so definiere einen Weg $f * g$ von x_0 nach x_2 gegeben durch

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{für } s \in [0, 1/2] \\ g(2s - 1) & \text{für } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Für jeden Weg f bezeichne $[f]$ die Äquivalenzklasse von f unter Weghomotopie. Wir definieren die Operation $*$ auf den Äquivalenzklassen durch

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Um zu sehen, dass das wohldefiniert ist, muss man sich von der Verträglichkeit der Operation mit der Äquivalenzrelation überzeugen. Gegeben $f \simeq f'$ und $g \simeq g'$ mit passenden Anfangs- und Endpunkten, dann müssen wir $(f * g) \simeq (f' * g')$ zeigen. Ist F eine Homotopie von f nach f' und G eine Homotopie von g nach g' , so ist

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & \text{für } s \in [0, 1/2] \\ G(2s - 1, t) & \text{für } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

die gewünschte Homotopie von $f * g$ nach $f' * g'$ (siehe Abbildung 4).

Die Operation $*$ hat gute algebraische Eigenschaften, wenn man davon absieht, dass $[f] * [g]$ überhaupt nur dann definiert ist, wenn der Endpunkt von f mit dem Anfangspunkt von g übereinstimmt.

Satz 4.3.

- (1) (Assoziativität) Ist $[f] * ([g] * [h])$ definiert, so auch $([f] * [g]) * [h]$ und beide stimmen überein.
 (2) (Rechts- und linksneutrales Element) Für $x \in X$ sei e_x der konstante Weg mit Wert x . Für jeden Weg f von x_0 nach x_1 gilt

$$[e_{x_0}] * [f] = [f] \quad \text{und} \quad [f] * [e_{x_1}] = [f].$$

- (3) (Inverse) Sei f ein Weg von x_0 nach x_1 und setze $\bar{f}(s) = f(1-s)$. Dann ist \bar{f} ein Weg von x_1 nach x_0 und es gilt

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad \text{und} \quad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

Beweis. Zunächst zwei einfache Beobachtungen. Ist $k: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, F eine Weghomotopie in X von f nach f' , so ist $k \circ F$ eine Weghomotopie in Y von $k \circ f$ nach $k \circ f'$. Und sind f und g Wege in X mit $f(1) = g(0)$, so gilt

$$k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g).$$

(2) Es sei e_0 der konstante Weg $e_0: I \rightarrow I$, $e_0(s) = 0$ und $i: I \rightarrow I$ die Identität. Dann ist i ein Weg von 0 nach 1 in I und ebenso $e_0 * i$. Da I konvex ist, gibt es eine Weghomotopie G in I von i nach $e_0 * i$. (Wie sieht die konkret aus?) Dann ist $f \circ G$ eine Weghomotopie in X zwischen $f \circ i = f$ und

$$f \circ (e_0 * i) = (f \circ e_0) * (f \circ i) = e_{x_0} * f.$$

Die zweite Gleichung zeigt man in ähnlicher Weise.

(3) Das geht auch ganz ähnlich: Zu $i: I \rightarrow I$ wie oben bilde $\bar{i}: I \rightarrow I$, $\bar{i}(s) = 1-s$. Dann gibt es eine Weghomotopie H in I von e_0 nach $i * \bar{i}$, und $f \circ H$ ist eine Weghomotopie von $f \circ e_0 = e_{x_0}$ nach

$$(f \circ i) * (f \circ \bar{i}) = f * \bar{f}.$$

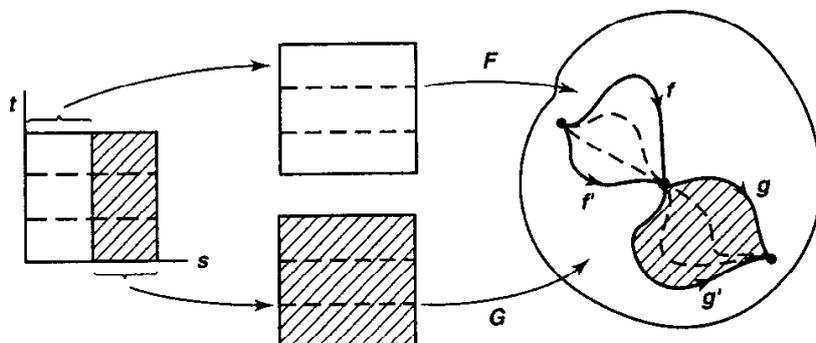


ABBILDUNG 4. [Mu, Fig. 51.5]

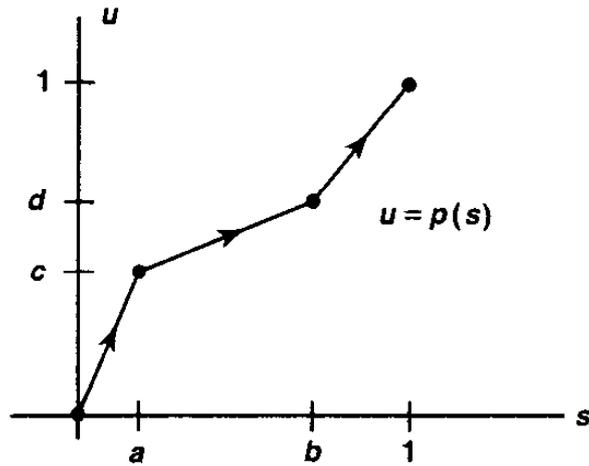


ABBILDUNG 5. [Mu, Fig. 51.9]

Dies zeigt die erste Gleichheit und die zweite geht analog.

(1) Für den Beweis der Assoziativität ist es hilfreich, die Sache ein wenig allgemeiner hinzuschreiben. Sind $[a, b]$, $[c, d]$ zwei Intervalle in \mathbb{R} , so gibt es eine eindeutige affin-lineare Bijektion $p: [a, b] \rightarrow [c, d]$ mit $p(a) = c$ und $p(b) = d$. Per Definition ist das Produkt $f * g$ auf $[0, 1/2]$ gegeben durch die affin-lineare Bijektion $[0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$ gefolgt von f und auf $[1/2, 1]$ durch die affin-lineare Bijektion $[1/2, 1] \rightarrow [0, 1]$ gefolgt von g . Dafür verwenden wir ad hoc die folgende Notation:

$$(f * g): \begin{cases} [0, 1/2] \rightarrow I \xrightarrow{f} X \\ [1/2, 1] \rightarrow I \xrightarrow{g} X \end{cases},$$

wobei jeweils der erste Pfeil die entsprechende affin-lineare Bijektion bezeichnet. Seien nun f, g, h Wege mit $f(1) = g(0)$ und $g(1) = h(0)$. Wähle $a, b \in (0, 1)$, $a < b$, und definiere einen Weg $k_{a,b}$ in X durch

$$k_{ab}: \begin{cases} [0, a] \rightarrow I \xrightarrow{f} X \\ [a, b] \rightarrow I \xrightarrow{g} X \\ [b, 1] \rightarrow I \xrightarrow{h} X \end{cases}$$

Wir zeigen, dass $k_{a,b}$ und $k_{c,d}$ weghomotop sind. Sei p dazu die Abbildung

$$p: \begin{cases} [0, a] \rightarrow [0, c] \\ [a, b] \rightarrow [c, d] \\ [b, 1] \rightarrow [d, 1]. \end{cases}$$

(siehe Abb. 5). Dann gilt $k_{c,d} \circ p = k_{a,b}$. Nun ist p ein Weg in I von 0 nach 1 und damit homotop zur Identität. Ist P eine Weghomotopie von p nach i in I , dann ist $k_{c,d} \circ P$ eine Weghomotopie von $k_{a,b}$ nach $k_{c,d}$ in X . Die Assoziativität ist ein Spezialfall dieser Aussage. Denn $f * (g * h)$ ist gerade $k_{a,b}$ für $a = 1/2$ und $b = 3/4$, während $(f * g) * h$ gerade $k_{c,d}$ für $c = 1/4$ und $d = 1/2$ ist. \square

Übung 4.1. Vervollständige den Beweis von Satz 4.3.

Übung 4.2. Es seien X, Y zwei Räume und sei $I = [0, 1]$. Zeige:

- (a) Alle stetigen Abbildungen $X \rightarrow I$ sind zueinander homotop.
- (b) Ist Y wegzusammenhängend, so sind alle stetigen Abbildungen $I \rightarrow Y$ homotop.

Übung 4.3. Ein Raum X heißt **kontrahierbar**, wenn die Identität $i_X: X \rightarrow X$ nullhomotop ist. Beweise die folgenden Aussagen:

- (a) Die Räume $[0, 1]$ und \mathbb{R} sind kontrahierbar.
- (b) Jeder kontrahierbare Raum ist wegzusammenhängend.
- (c) Ist Y kontrahierbar, so sind alle stetigen Abbildungen $X \rightarrow Y$ homotop.
- (d) Ist X kontrahierbar und Y wegzusammenhängend, so sind alle stetigen Abbildungen $X \rightarrow Y$ homotop.

4.2. DIE FUNDAMENTALGRUPPE

Es sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Punkt. Ein Weg in X mit Anfangs- und Endpunkt x_0 heißt eine **Schleife mit Basispunkt** x_0 . Es ist eine direkte Konsequenz von Satz 4.3, dass die Menge aller Homotopieäquivalenzklassen von Schleifen mit Basispunkt x_0 unter der Operation $*$ eine Gruppe bilden, genannt die **Fundamentalgruppe von X mit Basispunkt x_0** . Sie wird mit $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnet¹. Das neutrale Element von $\pi_1(X, x_0)$ ist die Homotopieäquivalenzklasse des konstanten Wegs $[e_{x_0}]$, und das Inverse eines Elements $[f]$ ist durch $[\bar{f}]$, die umgekehrt durchlaufene Schleife, gegeben.

Die erste grundlegende Frage, die wir klären müssen, ist die Abhängigkeit der Fundamentalgruppe von der Wahl des Basispunkts x_0 . Sind $x_0, x_1 \in X$ und ist α ein Weg von x_0 nach x_1 , dann erhält man eine Abbildung

$$\widehat{\alpha}: \begin{cases} \pi_1(X, x_0) & \rightarrow & \pi_1(X, x_1) \\ [f] & \mapsto & [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha] \end{cases}$$

Zunächst bemerken wir, dass die Abbildung $\widehat{\alpha}$ wohldefiniert ist. Ist $[f]$ eine Schleife mit Basispunkt x_0 , dann ist $[\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]$ tatsächlich eine Schleife mit Basispunkt x_1 (siehe Abb. 6). Per Definition hängt die Abbildung $\widehat{\alpha}$ nur von der Homotopieäquivalenzklasse von α ab.

Proposition 4.4. Die gerade definierte Abbildung $\widehat{\alpha}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Dass $\widehat{\alpha}$ ein Gruppenhomomorphismus ist, zeigt die Rechnung

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}([f]) * \widehat{\alpha}([g]) &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \widehat{\alpha}([f] * [g]). \end{aligned}$$

¹Wie es die Notation suggeriert, gibt es außer π_1 auch noch π_2, π_3 usw. Dies sind die höheren *Homotopiegruppen*, die aus den Homotopieäquivalenzklassen stetiger Abbildungen $S^n \rightarrow X$ mit festem Basispunkt bestehen. Diese sind deutlich komplizierter und werden bei uns keine Rolle spielen.

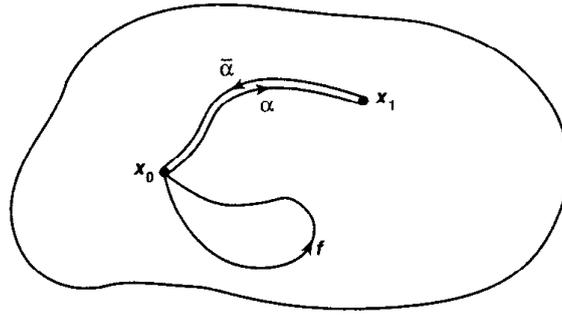


ABBILDUNG 6. [Mu, Fig. 52.1]

Um zu zeigen, dass $\widehat{\alpha}$ ein Isomorphismus ist, zeigen wir, dass $\widehat{\alpha}$ zu $\widehat{\alpha}$ invers ist. Denn für jedes $f \in \pi_1(X, x_1)$ gilt

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}([h]) &= [\overline{\alpha}] * [f] * [\overline{\alpha}] = [\alpha] * [f] * [\overline{\alpha}] \\ \widehat{\alpha}(\widehat{\alpha}([f])) &= [\overline{\alpha}] * ([\alpha] * [f] * [\overline{\alpha}]) * [\alpha] = [f].\end{aligned}$$

Eine völlig analoge Rechnung zeigt $\widehat{\alpha}(\widehat{\alpha}([f])) = [f]$ für alle $f \in \pi_1(X, x_0)$. \square

Übung 4.4. Es sei α ein Weg von x_0 nach x_1 in X und β ein Weg von x_1 nach x_2 und setze $\gamma = \alpha \circ \beta$. Zeige, dass $\widehat{\gamma} = \widehat{\beta} \circ \widehat{\alpha}$ gilt.

Übung 4.5. Es sei X ein wegzusammenhängender Raum und $x_0, x_1 \in X$. Zeige: Genau dann ist die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ abelsch, wenn $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ für alle Wege α, β von x_0 nach x_1 gilt.

Korollar 4.5. Ist X wegzusammenhängend und sind x_0, x_1 zwei Punkte in X , so sind $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph. \square

Ist W eine Wegkomponente von X und $x_0 \in W$, so liegen auch alle Schleifen in X mit Basispunkt x_0 in W und es gilt $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(W, x_0)$. Mit anderen Worten, die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ enthält keinerlei Information über irgendetwas in X , das sich außerhalb von W abspielt. Deshalb wird in allen Sätzen über die Fundamentalgruppe in der Regel X als wegzusammenhängend vorausgesetzt.

In diesem Fall hängt die Fundamentalgruppe dann bis auf Isomorphie nicht von der Wahl des Basispunkts ab und man kann mit Recht von *der* Fundamentalgruppe von X sprechen. Es gibt allerdings ein Problem. Der Isomorphismus $\widehat{\alpha}$ zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ in Prop. 4.4 hängt von der Homotopieklasse des gewählten Wegs α ab. Deshalb sind $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ zwar isomorph, aber nicht *natürlich isomorph*. Diese Unterscheidung wirkt etwas verstiegen. Sie ist aber der Grund dafür, den Basispunkt x_0 in der Notation immer mitzuschleppen.

Ein Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, wenn er wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X, x_0)$ für ein $x_0 \in X$ die triviale Gruppe mit einem Element ist. (Ist dies für einen Punkt in X der Fall, dann auch für jeden anderen, wie wir gerade gesehen haben.) Wir schreiben in diesem Fall kurz $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Lemma 4.6. In einem einfach zusammenhängenden Raum sind je zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt weghomotop.

Beweis. Seien α und β zwei Wege von x_0 nach x_1 . Dann ist $\alpha * \bar{\beta}$ eine Schleife mit Basispunkt x_0 . Da X einfach zusammenhängend ist, gilt also $[\alpha * \bar{\beta}] = [e_{x_0}]$ und damit $[\alpha] = [\alpha] * [\bar{\beta}] * [\beta] = [\alpha * \bar{\beta}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta] = [\beta]$. \square

Zum Schluss untersuchen wir noch das Verhalten der Fundamentalgruppe unter stetigen Abbildungen. Ist $h: X \rightarrow Y$ stetig und ist $x_0 \in X$ ein Punkt und $y_0 = f(x_0)$, so notieren wir das kurz

$$h: (X, x_0) \mapsto (Y, y_0).$$

In dieser Situation definieren wir

$$h_*: \begin{cases} \pi_1(X, x_0) & \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [f] & \mapsto [h \circ f] \end{cases}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn ist F eine Weghomotopie zwischen den Wegen f, f' in X , so ist $h \circ F$ eine Weghomotopie zwischen $h \circ f$ und $h \circ f'$. Die Abbildung h_* ist außerdem ein Gruppenhomomorphismus, denn es gilt

$$(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g)$$

für alle Schleifen f, g in X mit Basispunkt x_0 . Man beachte, dass die Wahl des Basispunkts in die Definition von h_* eingeht. Wenn nötig schreiben wir deshalb $(h_{x_0})_*$.

Der Übergang von stetigen Abbildungen zu Homomorphismen zwischen den Fundamentalgruppen ist *funktoriell*, was genau die folgende Aussage ist.

Proposition 4.7. *Seien $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ und $k: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ stetige Abbildungen. Dann gilt*

$$(k \circ h)_* = k_* \circ h_*.$$

Ist $i: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ die Identität, so ist i_ die Identität auf $\pi_1(X, x_0)$.*

Beweis. Übung. \square

Korollar 4.8. *Ist $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ein Homöomorphismus, so ist $h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Es sei $k: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ die Umkehrabbildung von h . Dann gilt $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = i_*$ und $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = j_*$, wobei i die Identität auf X und j die Identität auf Y ist. Da i_* und j_* die Identität sind, ist k_* also das Inverse von h_* . \square

Übung 4.6. Zeige, dass jede sternförmige Teilmenge von \mathbb{R}^2 einfach zusammenhängend ist. (Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $x_0 \in M$ gibt derart, dass für jeden Punkt $x \in M$ die Verbindungsstrecke von x_0 und x vollständig in M enthalten ist.)

Übung 4.7. Sei A eine Teilmenge des Raums X und sei $r: X \rightarrow A$ ein Retrakt, also eine stetige Abbildung mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$. Zeige: Für jedes $a_0 \in A$ ist

$$r_*: \pi_1(X, a_0) \rightarrow \pi_1(A, a_0)$$

surjektiv.

Übung 4.8. Es sei M ein Teilraum von \mathbb{R}^n und $h: (M, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine stetige Abbildung in einen Raum Y . Zeige: Falls es eine stetige Abbildung $\tilde{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ gibt mit $\tilde{h}|_M = h$, dann ist h_* der triviale Homomorphismus (der alles auf die Identität abbildet).

4.3. ÜBERLAGERUNGEN

Überlagerungen sind einerseits ein technisches Hilfsmittel für das Studium der Fundamentalgruppe. Andererseits ermöglichen sie auch eine alternative geometrische Sicht auf diverse topologische Sachverhalte.

Eine stetige Surjektion $p: E \rightarrow B$ heißt eine **Überlagerung** (von B durch E), wenn jeder Punkt von B eine Umgebung U mit folgender Eigenschaft besitzt: Es gibt eine Familie $\{V_\alpha\}$ von paarweise disjunkten offenen Teilmengen von E mit $p^{-1}(U) = \bigcup_\alpha V_\alpha$ so, dass die Einschränkung $p: V_\alpha \rightarrow U$ für jedes α ein Homöomorphismus ist. Die Mengen V_α heißen die **Blätter** von p über U , der Raum B auch **Basisraum**.

Geometrisch soll man sich vorstellen, dass $p^{-1}(U)$ wie ein Stapel Pfannkuchen über U liegt (Munkres! siehe Abb. 7). Ist $b \in B$ ein Punkt und U eine Umgebung mit

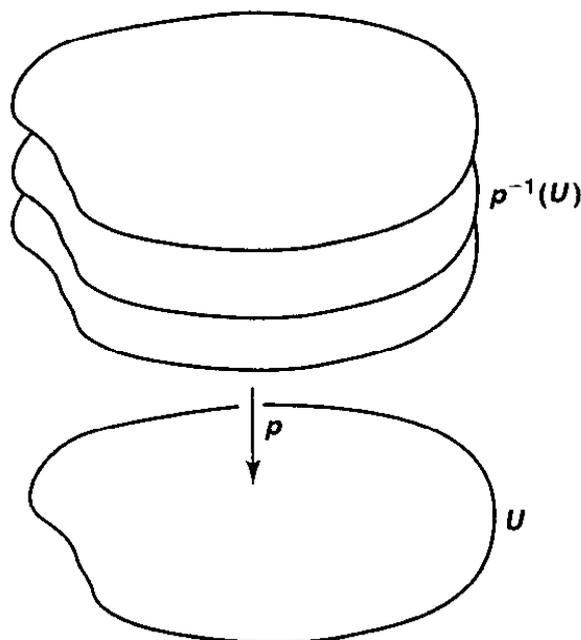


ABBILDUNG 7. [Mu, Fig. 53.1]

dieser Eigenschaft, so sagt man, dass p über U **trivialisiert**. Eine Überdeckung von B durch offene Mengen, über denen p trivialisiert, nennt man auch insgesamt eine **Trivialisierung** der Überlagerung. Beachte, dass bei einer Überlagerung die Faser $p^{-1}(b)$ eines Punkts $b \in B$ immer die diskrete Topologie trägt. Denn ist U eine Umgebung von b , über der p trivialisiert, dann schneidet jedes Blatt V_α die Faser $p^{-1}(b)$ in genau einem Punkt, was zeigt, dass dieser Punkt in $p^{-1}(b)$ offen ist. Der ganze Witz am Begriff der Überlagerung liegt darin, dass eine Überlagerung zwar *lokal trivial* ist, aber nicht *global*.

Beispiele 4.9. (1) Für jeden Raum X ist die Identität $X \rightarrow X$ eine Überlagerung. Ist allgemeiner I ein diskreter Raum, etwa $I = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $E = X \times I$

mit der Projektion $p(x, i) = x$ eine Überlagerung von X . Diese trivialisiert über jeder offenen Teilmenge von X . Solche global trivialen Überlagerungen sind nicht sehr interessant, weshalb man meistens nur an Überlagerungen mit wegzusammenhängendem Raum E interessiert ist.

(2) Das folgende Beispiel ist fundamental. Die Abbildung

$$p: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\} \\ x & \mapsto & (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \end{cases}$$

ist eine Überlagerung. Sie wickelt die Gerade auf die Kreislinie auf, wobei jedes Intervall $[x, x+1]$ aufgrund der Periodizität von Sinus und Cosinus genau einem Umlauf entspricht. Um zu sehen, dass p eine Überlagerung ist, betrachte etwa die offene Menge $U = \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}$, der rechte offene Halbkreis. Dann gilt

$$p^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos 2\pi x > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

wobei $V_n = (n - 1/4, n + 1/4)$. Die offenen Intervalle V_n werden von p homöomorph auf U abgebildet. Denn auf dem Abschluss \overline{V}_n ist p injektiv, da der Sinus dort strikt monoton ist. Außerdem ist $p: \overline{V}_n \rightarrow \overline{U}$ surjektiv. Also ist $p|_{\overline{V}_n}$ eine stetige Bijektion zwischen kompakten Hausdorff-Räumen und damit ein Homöomorphismus (Satz 2.23). Damit ist auch $p: V_n \rightarrow U$ ein Homöomorphismus (siehe Abb. 8).

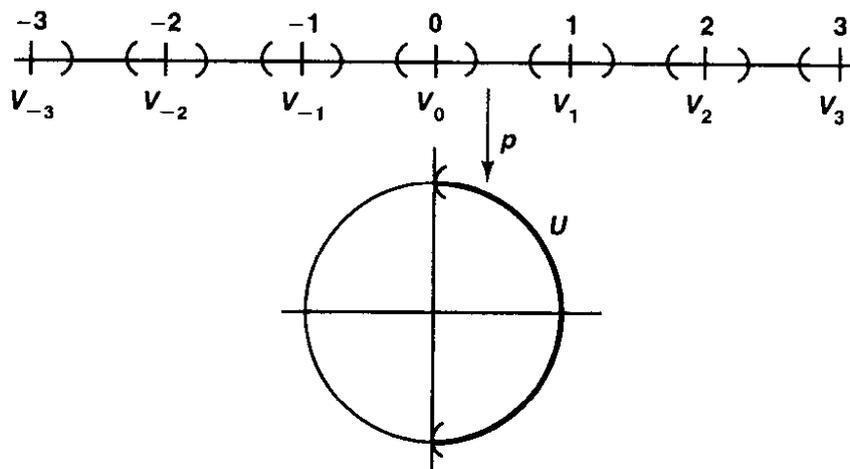


ABBILDUNG 8. [Mu, Fig. 53.2]

Analog kann man auch für den linken, oberen und unteren Halbkreis argumentieren. Da diese insgesamt S^1 überdecken, ist p eine Überlagerung.

(3) Betrachte die Einschränkung von p auf das offene Intervall $E = (0, \infty)$. Diese Abbildung ist immer noch ein lokaler Homöomorphismus, d.h. jeder Punkt von E besitzt eine Umgebung, die homöomorph auf ihr Bild abgebildet wird. Sie ist aber

keine Überlagerung. Denn der Punkt $(1, 0) \in S^1$ besitzt keine Umgebung, über der p trivialisiert. Denn für jede Umgebung U von $(1, 0)$, $U \neq S^1$, ist eine Komponente von $p^{-1}(U)$ ein Intervall der Form $(0, \varepsilon)$. Dieses wird von p nicht surjektiv auf U abgebildet (siehe Abbildung 9).

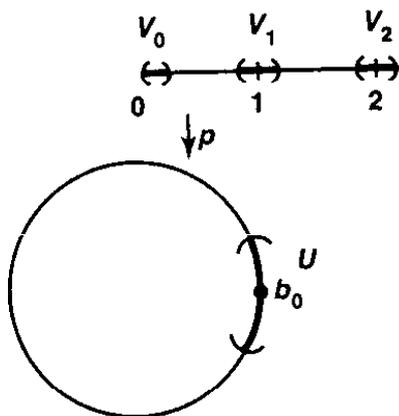


ABBILDUNG 9. [Mu, Fig. 53.3]

(4) Betrachte die Abbildung

$$p: \begin{cases} S^1 & \rightarrow S^1 \\ z & \mapsto z^2 \end{cases},$$

wobei wir $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ jetzt als Einheitskreis in der komplexen Ebene auffassen. Dann ist p ebenfalls eine Überlagerung.

Übung 4.9. Überprüfe, dass $p: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$ im obigen Beispiel tatsächlich eine Überlagerung ist.

Übung 4.10. Sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung. Zeige:

(a) Ist $U \subset B$ eine zusammenhängende offene Menge, über der p trivialisiert, dann ist die Zerlegung von $p^{-1}(U)$ in Blätter eindeutig.

(b) Sei B zusammenhängend. Falls $p^{-1}(b_0)$ für ein $b_0 \in B$ aus k Elementen besteht ($k \in \mathbb{N}$), so hat $p^{-1}(b)$ für jedes $b \in B$ genau k Elemente. In diesem Fall heißt p eine k -fache Überlagerung von B .

Lemma 4.10. Überlagerungen sind offene Abbildungen.

Beweis. Sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung. Ist V eine offene Menge von E und $x \in p(V)$, so wähle eine Umgebung U von x , über der p trivialisiert, und seien $\{V_\alpha\}$ die Blätter von p über U . Wähle $y \in V$ mit $p(y) = x$ und sei V_β ein Blatt mit $y \in V_\beta$. Dann ist $V_\beta \cap V$ offen und damit auch offen in V_β . Da $p: V_\beta \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist, ist $p(V_\beta \cap V)$ offen in U und damit in B . Diese Menge ist also eine Umgebung von x in $p(V)$, was zeigt, dass x ein innerer Punkt von $p(V)$ ist. \square

Beispiel 4.9(3) zeigt, dass die Einschränkung einer Überlagerung auf einen Teilraum keine Überlagerung sein muss. Man kann Überlagerungen aber problemlos auf Teilmengen des Basisraums einschränken.

Proposition 4.11. *Es sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung. Ist $B_0 \subset B$ ein Teilraum, so ist die Einschränkung $p: E_0 \rightarrow B_0$ von p auf $E_0 = p^{-1}(B_0)$ wieder eine Überlagerung.*

Beweis. Ist $x \in B_0$ und U eine Umgebung von x in B , über der U trivialisiert mit Blättern $\{V_\alpha\}$, so ist $U \cap B_0$ eine Umgebung von x in B_0 , und p trivialisiert auch über $U \cap B_0$ mit Blättern $\{V_\alpha \cap E_0\}$. \square

Auch vertragen sich Überlagerungen mit endlichen kartesischen Produkten.

Proposition 4.12. *Es seien $p: E \rightarrow B$ und $p': E' \rightarrow B'$ Überlagerungen. Dann ist auch*

$$p \times p': \begin{cases} E \times E' & \rightarrow & B \times B' \\ (x, y) & \mapsto & (p(x), p'(y)) \end{cases}$$

eine Überlagerung.

Beweis. Übung. \square

Beispiel 4.13. Betrachte den Torus $T = S^1 \times S^1$ und sei $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ die Überlagerung aus Beispiel 4.9(2). Dann ist $p \times p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow T$ eine Überlagerung des Torus. Jedes Quadrat $[x, x+1] \times [y, y+1]$ bildet dabei surjektiv auf den Torus ab (siehe Abb. 10).

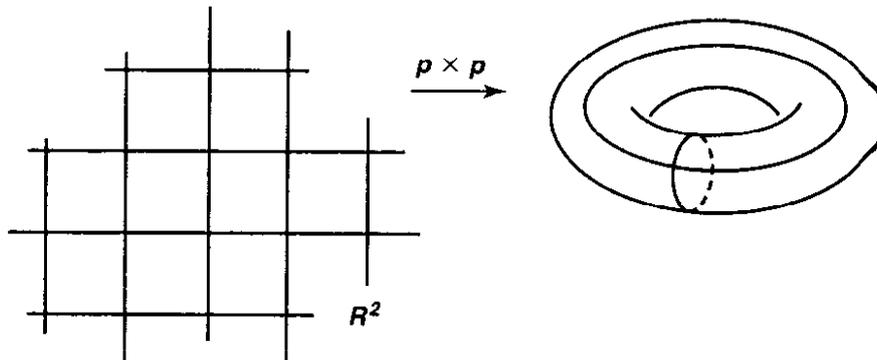


ABBILDUNG 10. [Mu, Fig. 53.4]

Sei weiter $b_0 = p(0) \in S^1$ und betrachte den Teilraum

$$B_0 = (S^1 \times \{b_0\}) \cup (\{b_0\} \times S^1)$$

bestehend aus zwei Kreisen in T , die sich in einem Punkt schneiden. Als topologischer Raum ist B_0 eine Acht. Der Raum $E_0 = p^{-1}(B_0)$ ist das Netz

$$E_0 = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}),$$

das in Abbildung 10 zu sehen ist. Nach Prop. 4.11 ist $p: E_0 \rightarrow B_0$ eine Überlagerung der Acht durch das Netz.

Übung 4.11. Zeige, dass der Torus wie in 3.3(2) definiert zu $S^1 \times S^1$ homöomorph ist.

Beispiel 4.14. Betrachte die Überlagerung

$$p \times i: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}_{>0}$$

wobei i die Identität ist und p die Standard-Überlagerung. Der Raum $S^1 \times \mathbb{R}_{>0}$ ist homöomorph zur gelochten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, durch den Homöomorphismus $((x, y), t) \mapsto (tx, ty)$ (Polarkoordinaten). Wir erhalten damit eine Überlagerung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$$

der gelochten Ebene durch die obere Halbebene. Diese Überlagerung ist geometrisch in Abb. 11 dargestellt. Sie taucht in natürlicher Weise in der Funktionentheorie beim Studium der komplexen Exponentialfunktion bzw. des Logarithmus auf.

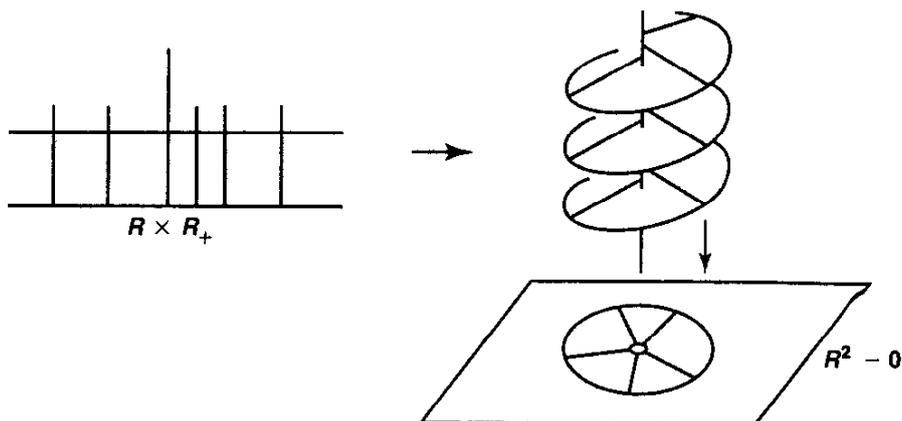


ABBILDUNG 11. [Mu, Fig. 53.6]

4.4. LIFTS UND DIE FUNDAMENTALGRUPPE DES KREISES

Als nächstes untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Überlagerungen und Fundamentalgruppe. Eine entscheidende Rolle spielen dabei die sogenannten Lifts von Abbildungen. Es seien $p: E \rightarrow B$ und $f: X \rightarrow B$ stetige Abbildungen. Eine weitere stetige Abbildung $\tilde{f}: X \rightarrow E$ derart, dass $p \circ \tilde{f} = f$ gilt, heißt ein **Lift** (oder **Hochhebung**) von f .

$$\begin{array}{ccc}
 & E & \\
 \tilde{f} \nearrow & & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Beispiel 4.15. Betrachte die übliche Überlagerung $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$. Der Weg $f: [0, 1] \rightarrow S^1$ von $(1, 0)$ nach $(-1, 0)$ gegeben durch $f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$ hat den Lift $\tilde{f}(s) = s/2$ von 0 nach $1/2$ in \mathbb{R} . Der Weg $g(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$ liftet zum Weg $\tilde{g}(s) = -s/2$ von 0 nach $-1/2$. Der Weg $h(s) = (\cos 4\pi s, \sin 4\pi s)$ liftet zu $\tilde{h}(s) = 2s$ von 0 nach 2 (siehe Abb. 12).

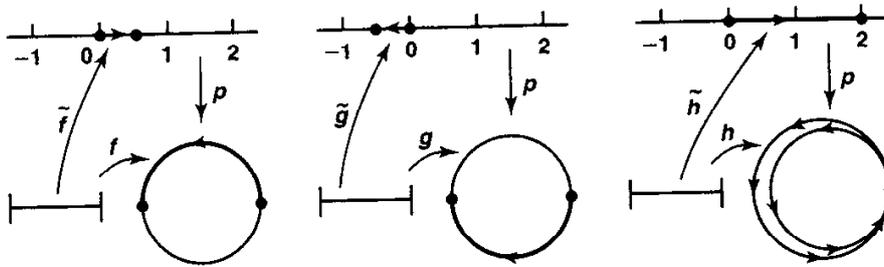


ABBILDUNG 12. [Mu, Fig. 54.1]

Übung 4.12. Betrachte in Beispiel 4.13 den Weg

$$f(t) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t))$$

auf dem Torus T . Bestimme einen Lift von f ; skizziere f und seinen Lift.

Übung 4.13. Betrachte in Beispiel 4.14 die Wege

$$f(t) = (2 - t, 0)$$

$$g(t) = ((1 + t) \cos 2\pi t, (1 + t) \sin 2\pi t)$$

$$h(t) = f * g$$

in $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. Bestimme Lifts dieser Wege; skizziere die Wege und ihre Lifts.

Lemma 4.16. Es sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung; sei $e_0 \in E$ und $p(e_0) = b_0$. Dann besitzt jeder Weg in B mit Anfangspunkt b_0 eine eindeutigen Lift zu einem Weg in E mit Anfangspunkt e_0 .

Beweis. Es sei $f: [0, 1] \rightarrow B$ ein Weg mit $f(0) = b_0$. Wähle eine offene Überdeckung \mathcal{U} von B , so dass p über jeder Menge in \mathcal{U} trivialisiert. Wähle ferner eine endliche Unterteilung des Intervalls $[0, 1]$, gegeben durch $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ derart, dass jedes Wegstück $f([s_i, s_{i+1}])$, $i = 0, \dots, n-1$, in einer der Mengen in \mathcal{U} liegt. Die Existenz einer solchen Unterteilung ist nicht schwer zu sehen. Sie folgt aber auch aus dem nachfolgenden allgemeineren Lemma von Lebesgue, angewendet auf $f^{-1}(\mathcal{U})$.

Setze $\tilde{f}(0) = e_0$. Wir definieren den Lift \tilde{f} stückweise induktiv. Ist \tilde{f} definiert auf $[0, s_i]$, so definieren wir \tilde{f} auf $[s_i, s_{i+1}]$ wie folgt. Das Wegstück $f([s_i, s_{i+1}])$ liegt in

einem Element U von \mathcal{U} . Seien $\{V_\alpha\}$ die Blätter von p über U . Der bereits definierte Punkt $\tilde{f}(s_i)$ liegt in einem dieser Blätter, etwa V_β . Definiere nun

$$\tilde{f}(s) = (p|_{V_\beta})^{-1}(f(s)).$$

für $s \in [s_i, s_{i+1}]$. Beachte, dass $p|_{V_\beta}: V_\beta \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. Somit ist \tilde{f} stetig auf $[s_i, s_{i+1}]$. In dieser Weise definieren wir \tilde{f} auf $[0, 1]$. Nach Konstruktion ist \tilde{f} stetig und es gilt $p \circ \tilde{f} = f$.

Es bleibt die Eindeutigkeit von \tilde{f} zu zeigen. Sei \tilde{g} ein weiterer Lift von f mit Anfangspunkt e_0 . Wir zeigen die Gleichheit von \tilde{f} und \tilde{g} wieder durch Induktion über die Unterteilung. Es gelte $\tilde{g}(s) = \tilde{f}(s)$ für alle $s \in [0, s_i]$. Wähle V_β wie oben. Nach Konstruktion gilt $\tilde{f}(s) = (p|_{V_\beta})^{-1}(f(s))$ für $s \in [s_i, s_{i+1}]$. Da \tilde{g} ebenfalls ein Lift von f ist, muss $\tilde{g}([s_i, s_{i+1}])$ in $p^{-1}(U) = \bigcup_\alpha V_\alpha$ liegen. Da die Blätter V_α offen und disjunkt sind, muss das zusammenhängende Wegstück $g([s_i, s_{i+1}])$ in einem Blatt V_α enthalten sein. Wegen $\tilde{g}(s_i) = \tilde{f}(s_i) \in V_\beta$, kann dieses Blatt nur V_β sein. Für $s \in [s_i, s_{i+1}]$ gilt also $\tilde{g}(s) \in p^{-1}(f(s)) \cap V_\beta$. Aber diese Menge besteht nur aus einem einzigen Punkt, nämlich $(p|_{V_\beta})^{-1}(f(s))$. Es folgt $\tilde{g}(s) = \tilde{f}(s)$ für alle $s \in [s_i, s_{i+1}]$ und damit die behauptete Eindeutigkeit. \square

Lemma 4.17 (Lebesgue). *Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Dann gibt es eine Zahl $\delta > 0$, genannt die Lebesgue-Zahl von \mathcal{U} , derart, dass jede Teilmenge von X mit Durchmesser kleiner als δ in einem Element von \mathcal{U} enthalten ist.*

Dabei ist der Durchmesser einer Teilmenge $M \subset X$ definiert durch

$$\sup\{d(x, y) \mid x, y \in M\}.$$

Beweis. Falls $X \in \mathcal{U}$, so ist nichts zu zeigen. Wir nehmen also an, dass $X \notin \mathcal{U}$. Da X kompakt ist, können wir eine endliche Teilüberdeckung $\{U_1, \dots, U_n\}$ von \mathcal{U} wählen, und es genügt, die Behauptung für diese Teilüberdeckung zu beweisen. Setze $A_i = X \setminus U_i$ und definiere $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x, A_i),$$

wobei $d(x, A_i) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A_i\}$. Diese Funktion ist stetig (Übung). Zu $x \in X$, wähle i mit $x \in U_i$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset U_i$. Dann gilt $d(x, A_i) \geq \varepsilon$, also $g(x) \geq \varepsilon/n > 0$. Die Funktion g ist also positiv und hat daher auf dem Kompaktum X ein Minimum $\delta > 0$. Dieses δ hat die gewünschte Eigenschaft. Denn ist M eine Teilmenge von X mit Durchmesser höchstens δ und ist $x_0 \in M$, so gilt $M \subset B(x_0, \delta)$. Es sei $m \in \{1, \dots, n\}$ ein Index, für den $d(x_0, A_m)$ maximal ist. Dann folgt

$$\delta \leq g(x_0) \leq d(x_0, A_m)$$

und damit $B(x_0, \delta) \subset U_m$. \square

Als nächstes zeigen wir, dass sich nicht nur Wege, sondern auch ganze Weghomotopien auf Überlagerungen liften lassen.

Lemma 4.18. *Es sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung; sei $e_0 \in E$ und $p(e_0) = b_0$. Sei $F: I \times I \rightarrow B$ stetige Abbildung mit $F(0, 0) = b_0$. Dann gibt es einen eindeutigen Lift*

$$\tilde{F}: I \times I \rightarrow E$$

von F mit $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Ist F eine Weghomotopie, so auch \tilde{F} .

Beweis. Der Beweis ähnelt sehr dem von Lemma 4.16, nur dass wir uns diesmal mit einer Unterteilung in Rechtecke statt in Intervalle herumschlagen müssen.

Als erstes setzen wir $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Dann verwenden wir Lemma 4.16, um \tilde{F} auf der linken Kante $\{0\} \times I$ und der unteren Kante $I \times \{0\}$ von $I \times I$ zu definieren. Nun setzen wir \tilde{F} wie folgt auf ganz $I \times I$ fort. Wir wählen wieder eine Überdeckung \mathcal{U} von B , die p trivialisiert und wenden Lemma 4.17 auf die Überdeckung $\{F^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ von $I \times I$ an. Daraus erhalten wir die Existenz von Unterteilungen

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

die fein genug sind, damit jedes Rechteck

$$I_i \times J_j = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$$

von F in eine Menge in \mathcal{U} abgebildet wird. Nun definieren wir \tilde{F} vorsichtig Rechteck für Rechteck (siehe Abb. 13). Gegeben Indizes i_0 und j_0 , betrachte die Indexmenge

$$K = \{(i, j) \mid j < j_0 \text{ oder } (j = j_0 \wedge i < i_0)\}.$$

Wir nehmen induktiv an, dass \tilde{F} bereits definiert ist auf der Menge

$$M = (\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\}) \cup \bigcup_{(i,j) \in K} I_i \times J_j.$$

Dann definieren wir \tilde{F} auf $I_{i_0} \times J_{j_0}$ wie folgt. Wähle $U \in \mathcal{U}$ mit $F(I_{i_0} \times J_{j_0}) \subset U$ und seien $\{V_\alpha\}$ die Blätter von p über U . Nun ist \tilde{F} auf dem Schnitt $C = M \cap (I_{i_0} \times J_{j_0})$ bereits definiert. Diese Menge besteht gerade aus der linken und der unteren Kante des Rechtecks $I_{i_0} \times J_{j_0}$ und ist deshalb zusammenhängend. Daher ist $\tilde{F}(C)$ zusammenhängend und muss in einem der Blätter, etwa V_β enthalten sein. Die Einschränkung $p|_{V_\beta}$ ist ein Homöomorphismus $V_\beta \rightarrow U$. Es bleibt uns gar nichts anderes übrig, als

$$\tilde{F}(s, t) = (p|_{V_\beta})^{-1}(F(s, t))$$

für $(s, t) \in I_{i_0} \times J_{j_0}$ zu definieren. Dies zeigt die Existenz und mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Lemma 4.16 auch die Eindeutigkeit von \tilde{F} .

Ist F eine Weghomotopie, so bedeutet dies $F(\{0\} \times I) = \{b_0\}$. Es folgt $\tilde{F}(\{0\} \times I) \subset p^{-1}(b_0)$. Nun ist $\tilde{F}(\{0\} \times I)$ zusammenhängend und enthält e_0 . Dagegen ist $p^{-1}(b_0)$ diskret. Also muss $\tilde{F}(\{0\} \times I) = \{e_0\}$ gelten. Genauso sieht man, dass $\tilde{F}(\{1\} \times I)$ nur aus einem Punkt bestehen kann. Also ist \tilde{F} eine Weghomotopie. \square

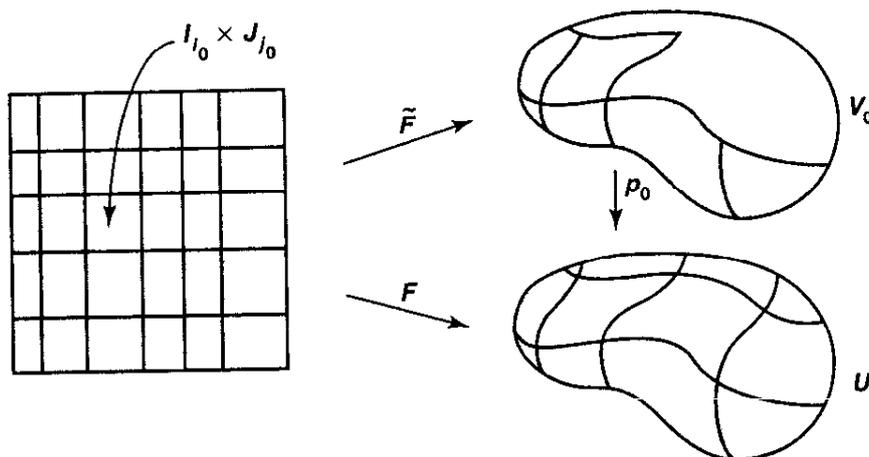


ABBILDUNG 13. [Mu, Fig. 54.2]

Satz 4.19. *Es sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung; sei $e_0 \in E$ und $p(e_0) = b_0$. Seien f, g zwei Wege in B mit Anfangspunkt b_0 und gleichem Endpunkt; seien \tilde{f} bzw. \tilde{g} die Lifts von f bzw. g nach E mit Anfangspunkt e_0 . Sind f und g weghomotop, so haben \tilde{f} und \tilde{g} denselben Endpunkt und sind ebenfalls weghomotop.*

Beweis. Es sei $F: I \times I \rightarrow B$ eine Weghomotopie von f nach g . Dann gilt $F(0, 0) = b_0$. Nach Lemma 4.18 gibt es einen eindeutigen Lift $\tilde{F}: I \times I \rightarrow E$ mit $\tilde{F}(0, 0) = e_0$ und dieser ist eine Weghomotopie, so dass $\tilde{F}(\{0\} \times I) = \{e_0\}$ und $\tilde{F}(\{1\} \times I) = \{e_1\}$, $e_1 \in E$. Die Einschränkung $\tilde{F}|_{I \times \{0\}}$ auf die untere Kante von $I \times I$ ist ein Weg in E mit Anfangspunkt e_0 und ein Lift von $F|_{I \times \{0\}}$. Wegen der Eindeutigkeit in Lemma 4.16 gilt $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$ für alle $s \in I$. Genauso $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{g}(s)$ für alle $s \in I$. Also haben \tilde{f} und \tilde{g} den gleichen Endpunkt e_1 und \tilde{F} ist eine Weghomotopie von \tilde{f} nach \tilde{g} . \square

Damit haben wir alles zusammen, um Äquivalenzklassen von Schleifen, also Elemente von Fundamentalgruppen, zu liften. Es sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung und sei $b_0 \in B$ ein Basispunkt. Wähle $e_0 \in E$ mit $p(e_0) = b_0$. Gegeben ein Element $[f] \in \pi_1(B, b_0)$, sei \tilde{f} der Lift von f zu einem Weg in E mit Anfangspunkt e_0 . Wir schreiben $\varphi[f]$ für den Endpunkt von \tilde{f} in E . Nach dem vorigen Satz hängt dieser nicht von der Wahl des Repräsentanten f von $[f]$ ab. Wir haben also eine Abbildung

$$\varphi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0).$$

Wir nennen φ die **Liftungskorrespondenz** der Überlagerung p . Sie hängt außer von b_0 nach Konstruktion auch von der Wahl des Punkts e_0 ab.

Satz 4.20. *Es sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung. Sei $e_0 \in E$ und $b_0 = p(e_0)$. Falls E wegzusammenhängend ist, so ist die Liftungskorrespondenz*

$$\varphi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0).$$

surjektiv. Ist E einfach zusammenhängend, so ist sie bijektiv.

Beweis. Es sei E wegzusammenhängend. Zu jedem $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ gibt es dann einen Weg \tilde{f} in E von e_0 nach e_1 . Dann ist $f = p \circ \tilde{f}$ eine Schleife in B mit Basispunkt b_0 und es gilt $\varphi[f] = e_1$ nach Definition. Also ist φ surjektiv.

Angenommen E ist einfach zusammenhängend. Seien $[f]$ und $[g]$ zwei Elemente von $\pi_1(B, b_0)$ mit $\varphi[f] = \varphi[g]$. Seien \tilde{f} und \tilde{g} Lifts von f und g mit Anfangspunkt e_0 . Nach Satz 4.19 haben \tilde{f} und \tilde{g} denselben Endpunkt. Da E einfach zusammenhängend ist, gibt es dann eine Weghomotopie \tilde{F} in E von \tilde{f} nach \tilde{g} . Dann ist $p \circ \tilde{F}$ eine Weghomotopie in B von f nach g , also $[f] = [g]$. \square

Satz 4.21. *Die Fundamentalgruppe von S^1 ist unendlich zyklisch, also isomorph zur additiven Gruppe \mathbb{Z} .*

Beweis. Es sei $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ die übliche Überlagerung (Beispiel 4.9(2)). Sei $e_0 = 0$ und $b_0 = p(e_0) = (1, 0)$. Dann gilt $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$. Da \mathbb{R} einfach zusammenhängend ist, ist die Liftungskorrespondenz

$$\varphi: \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}$$

bijektiv. Es bleibt nur zu zeigen, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Seien dazu $[f], [g] \in \pi_1(S^1, b_0)$ und seien \tilde{f} und \tilde{g} Lifts mit Anfangspunkt 0 in \mathbb{R} . Sei $m = \tilde{f}(1)$ und $n = \tilde{g}(1)$, also $\varphi[f] = m$ und $\varphi[g] = n$. Es sei \tilde{h} der Weg

$$\tilde{h}(s) = m + \tilde{g}(s)$$

in \mathbb{R} . Wegen $p(m+x) = p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist \tilde{h} ebenfalls ein Lift von g , mit Anfangspunkt m . Dann ist $\tilde{f} * \tilde{h}$ definiert und ist der Lift von $f * g$ mit Anfangspunkt 0 (siehe Aufgabe 4.14). Der Endpunkt von \tilde{h} ist $\tilde{h}(1) = m + n$. Damit folgt

$$\varphi([f] * [g]) = m + n = \varphi[f] + \varphi[g]. \quad \square$$

Übung 4.14. Sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung und seien α, β Wege in B mit $\alpha(1) = \beta(0)$. Seien $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ Lifts von α bzw. β mit $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$. Zeige, dass $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ ein Lift von $\alpha * \beta$ ist.

Übung 4.15. Es sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung. Zeige: Ist E wegzusammenhängend und B einfach zusammenhängend, dann ist p ein Homöomorphismus.

Übung 4.16. Verallgemeinere den Beweis von Satz 4.21, um zu zeigen, dass die Fundamentalgruppe des Torus zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ isomorph ist.

4.5. RETRAKTIONEN UND FIXPUNKTE

Sei A ein Teilraum eines topologischen Raums X . Eine **Retraktion** von X auf A ist eine stetige Abbildung $r: X \rightarrow A$ mit $r|_A = \text{id}_A$. Ein typisches Beispiel ist die Retraktion $r: \mathbb{R}^n \setminus 0 \rightarrow S^{n-1}$, $x \mapsto x/\|x\|$ vom Raum ohne den Ursprung auf die Einheitskugel. (Die Definition kam schon in Aufgabe 3.4 vor, wo gezeigt wurde, dass jede Retraktion eine Quotientenabbildung ist.) Wenn eine Retraktion von X auf A existiert, dann heißt A ein **Retrakt** von X .

Lemma 4.22. *Ist A ein Retrakt von X und $j: A \rightarrow X$ die Inklusion, so ist $j_*: \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ injektiv, für jedes $a \in A$.*

Beweis. Es sei $r: X \rightarrow A$ eine Retraktion. Dann gilt $r \circ j = \text{id}_A$ nach Definition und damit $r_* \circ j_* = \text{id}_{\pi_1(A, a)}$. Also ist j_* injektiv. \square

Satz 4.23. *Es gibt keine Retraktion einer abgeschlossenen Kreisscheibe auf ihren Rand.*

Beweis. Es sei $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe in \mathbb{R}^2 mit Rand S^1 . Es gilt $\pi_1(B^2, x_0) = \{e_{x_0}\}$ (da B^2 konvex ist) und $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ für alle $x_0 \in S^1$ (nach Satz 4.21). Es gibt also keine injektive Abbildung $\pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \pi_1(B^2, x_0)$. Nach dem vorigen Lemma kann S^1 also kein Retrakt von B^2 sein. \square

Lemma 4.24. *Es sei $h: S^1 \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

- (1) h ist nullhomotop.
- (2) h setzt zu einer stetigen Abbildung $B^2 \rightarrow X$ fort.
- (3) $h_*: \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, h(x_0))$ ist der triviale Homomorphismus.

Beweis. (1) \implies (2). Es sei $H: S^1 \times I \rightarrow X$ eine Homotopie zwischen h und einer konstanten Abbildung. Setze

$$\pi: \begin{cases} S^1 \times I & \rightarrow & B^2 \\ (x, t) & \mapsto & (1-t)x \end{cases} .$$

Die Abbildung π ist stetig, surjektiv und abgeschlossen (Check!) und damit eine Quotientenabbildung. Sie bildet $S^1 \times \{1\}$ auf einen Punkt ab und ist ansonsten injektiv. Da H auf $S^1 \times \{1\}$ konstant ist, gibt es nach Satz 3.5 eine Abbildung $k: B^2 \rightarrow X$ mit $H = k \circ \pi$. Dieses k ist gewünschte Fortsetzung von h (siehe Abb. 14).

(2) \implies (3). Ist $j: S^1 \rightarrow B^2$ die Inklusion und k die Fortsetzung aus (2), so gilt $h = k \circ j$ und damit $h_* = k_* \circ j_*$. Aber j_* ist die triviale Abbildung, da $\pi_1(B^2, b)$ für jedes $b \in B^2$ die triviale Gruppe ist. Also ist h_* die triviale Abbildung.

(3) \implies (1). Es sei $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ die Standard-Überlagerung und sei $p_0: I \rightarrow S^1$ die Einschränkung von p auf $[0, 1]$, $b_0 = (1, 0) = p(0)$. Dann ist $[p_0]$ ein Erzeuger von $\pi_1(S^1, b_0)$, wie wir im Beweis von Satz 4.21 gesehen haben.

Sei $x_0 = h(b_0)$. Nach Voraussetzung ist h_* trivial, somit gilt $h_*[p_0] = [e_{x_0}]$ in $\pi_1(X, x_0)$. Es gibt also eine Weghomotopie F in X zwischen $h \circ p_0$ und dem konstanten Weg in x_0 . Die Abbildung $p_0 \times \text{id}: I \times I \rightarrow S^1 \times I$ ist eine Quotientenabbildung,

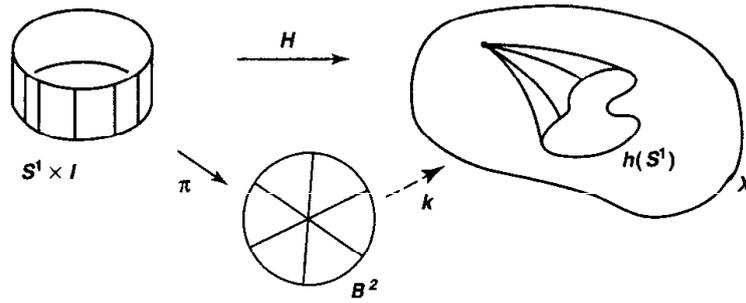


ABBILDUNG 14. [Mu, Fig. 55.1]

denn sie ist stetig, abgeschlossen und surjektiv. Sie bildet $(0, t)$ und $(1, t)$ für jedes $t \in I$ auf (b_0, t) ab und ist im übrigen injektiv. Die Weghomotopie F bildet $\{0\} \times I$ und $\{1\} \times I$ auf x_0 ab. Sie induziert also eine stetige Abbildung $H: S^1 \times I \rightarrow X$, die eine Homotopie zwischen h und der konstanten Abbildung in x_0 ist (s. Abb. 15). \square

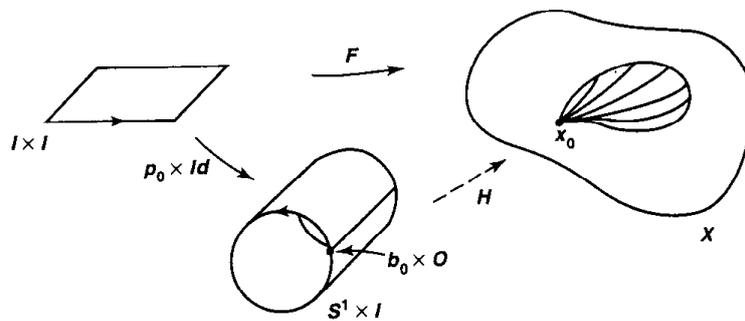


ABBILDUNG 15. [Mu, Fig. 55.2]

Korollar 4.25. Die Inklusion $j: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ und die Identität $S^1 \rightarrow S^1$ sind nicht nullhomotop.

Beweis. Die Abbildung $r: \mathbb{R}^2 \setminus 0 \rightarrow S^1, x \mapsto x/\|x\|$ ist eine Retraktion. Daher ist j_* nach Lemma 4.22 injektiv. Nach dem vorangehenden Lemma ist j also nicht nullhomotop. Analog argumentiert man für die Identität $S^1 \rightarrow S^1$. \square

Satz 4.26 (Brouwerscher Fixpunktssatz). Jede stetige Abbildung $B^2 \rightarrow B^2$ besitzt einen Fixpunkt.

Beweis. Angenommen falsch, dann gibt es also eine stetige Abbildung $f: B^2 \rightarrow B^2$ mit $f(x) \neq x$ für alle $x \in B^2$. Betrachte die Funktion $v(x) = x - f(x)$, die dann den Wert 0 nicht annimmt. Sei $w: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ die Einschränkung von v auf den Rand. Betrachte die Homotopie

$$F(x, t) = tx + (1 - t)w(x)$$

für $x \in S^1$. Behaupte, dass $F(x, t) \neq 0$ für alle $x \in S^1$ und $t \in [0, 1]$ gilt. Für $t = 0$ und $t = 1$ ist das klar. Falls $F(x, t) = 0$ für ein $x \in S^1$ und $t \in (0, 1)$, so bedeutet dies $x - f(x) = w(x) = -\frac{t}{1-t}x$, also

$$f(x) = \left(1 + \frac{t}{1-t}\right)x.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $f(x) \in B^2$. Also ist F eine Homotopie zwischen w und der Identität $S^1 \rightarrow S^1$ in $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. Andererseits ist w nullhomotop nach Lemma 4.24, denn v ist eine stetige Fortsetzung von w auf B^2 . Dies steht im Widerspruch zur Aussage von Korollar 4.25. \square

Korollar 4.27. *Jede 3×3 -Matrix mit positiven reellen Einträgen besitzt einen positiven reellen Eigenwert.*

Beweis. Es sei A eine solche Matrix. Sei

$$B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ und } \|x\| = 1\}.$$

Die Menge B ist homöomorph zu B^2 . Wir können also den Brouwerschen Fixpunktsatz auf stetige Abbildungen $B \rightarrow B$ anwenden. Sei $x \in B$. Da alle Einträge von A positiv sind und mindestens ein Eintrag von x ungleich 0, ist Ax ein Vektor mit positiven Einträgen. Daher ist die Abbildung $x \mapsto Ax/\|Ax\|$ eine stetige Abbildung von B nach B und besitzt daher einen Fixpunkt x_0 . Es gilt dann

$$Ax_0 = \|Ax_0\|x_0,$$

so dass $\|Ax_0\|$ ein positiver Eigenwert von A ist. \square

Übung 4.17. Zeige: Ist A ein Retrakt von B^2 , so besitzt jede stetige Abbildung $A \rightarrow A$ einen Fixpunkt.

Übung 4.18. Es sei $h: S^1 \rightarrow S^1$ stetig. Zeige: Ist h nullhomotop, so gibt es Punkte $x, x' \in S^1$ mit $h(x) = x$ und $h(x') = -x'$.

Der Brouwersche Fixpunktsatz gilt auch in höheren Dimensionen. Allerdings braucht man für den Beweis mehr technische Hilfsmittel, als wir zur Verfügung haben. Tatsächlich genügt aber die Verallgemeinerung von Satz 4.23, um den Rest zu beweisen, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Übung 4.19. Verwende die Aussage „Für $n \geq 1$ gibt es keine Retraktion $B^{n+1} \rightarrow S^n$ “, um das Folgende zu beweisen.

- Die Identität $S^n \rightarrow S^n$ ist nicht nullhomotop.
- Die Inklusion $S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ ist nicht nullhomotop.
- (Brouwerscher Fixpunktsatz) Jede stetige Abbildung $B^n \rightarrow B^n$ hat einen Fixpunkt.

4.6. DER FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA

Als weitere Anwendung beweisen wir den bekannten Fundamentalsatz der Algebra. Mit rein algebraischen Mitteln ist ein Beweis recht aufwendig. Daher bleibt der Fundamentalsatz in der Algebra-Vorlesung meistens unbewiesen.

Satz 4.28 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom in einer Veränderlichen besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Beweis. Wir nehmen die üblichen Identifikationen in der komplexen Ebene vor, $B^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, mit Rand $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Es sei

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$$

ein komplexes Polynom. Für jede positive reelle Zahl c ist

$$c^n p(z/c) = z^n + ca_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c^{n-1}a_1z + c^n a_0$$

und die Nullstellen von $c^n p(z/c)$ sind in Bijektion mit den Nullstellen von p . Indem wir c klein genug wählen, können wir daher ohne Einschränkung annehmen, dass

$$|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1$$

gilt. Wir zeigen, dass p dann eine Nullstelle in der Einheitskreisscheibe B^2 besitzt.

Angenommen falsch, dann ist durch p also eine Abbildung $B^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ gegeben. Nach Lemma 4.24 ist die Einschränkung $h: S^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$ nullhomotop. Andererseits ist h zur Abbildung $g: S^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$ homotop, und zwar durch die Homotopie

$$F(z, t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0),$$

die in Abb. 16 dargestellt ist.

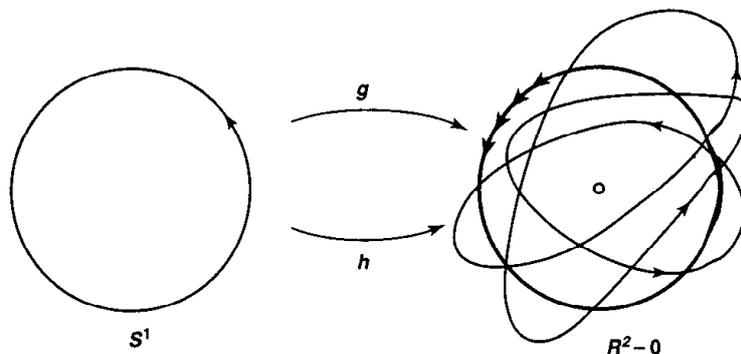


ABBILDUNG 16. [Mu, Fig. 56.1]

Wir müssen zeigen, dass $F(z, t) \neq 0$ für alle $z \in S^1$, $t \in [0, 1]$ gilt. Dies folgt aus der Voraussetzung an die Koeffizienten mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} |F(z, t)| &\geq |z^n| - |t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)| \\ &\geq 1 - t(|a_{n-1}z^{n-1}| + \dots + |a_0|) \\ &= 1 - t(|a_{n-1}| + \dots + |a_0|) > 0. \end{aligned}$$

Also ist h homotop zu g . Da h nullhomotop ist, muss also auch g nullhomotop sein. Wir zeigen, dass das nicht der Fall ist, und kommen damit zum Widerspruch.

Schreibe dazu g als die Komposition von $f: S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^n$, mit der Inklusion $j: S^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$. Ist $p_0: I \rightarrow S^1$, $s \mapsto e^{2\pi is}$ ein Erzeuger von $\pi_1(S^1)$, dann gilt

$$(f_* p_0)(s) = f(p_0(s)) = (e^{2\pi is})^n.$$

Dieser Weg liftet in der Überlagerung \mathbb{R} zum Weg $s \mapsto ns$. Unter dem Isomorphismus $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $p_0 \mapsto 1$ (Satz 4.21) entspricht f_* also der Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $k \mapsto nk$ und ist damit injektiv. Da S^1 ein Retrakt von \mathbb{C}^* ist, ist auch j_* nach Lemma 4.22 injektiv. Damit ist auch $g_* = j_* \circ f_*$ injektiv. Nach Lemma 4.24 ist g damit nicht nullhomotop. \square

Übung 4.20. Es sei $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ ein komplexes Polynom mit $|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| < 1$. Zeige, dass alle Nullstellen von p in der Einheitskreisscheibe liegen.

4.7. DER SATZ VON BORSUK-ULAM IN DIMENSION 2

Eine Variation der Fixpunktsätze ist der Satz von Borsuk-Ulam, der sich mit Abbildungen auf Sphären befasst. Es sei $x \in S^n$. Der Punkt $-x$ heißt die **Antipode** von x . Eine stetige Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ heißt **antipodenerhaltend**, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^n$ gilt.

Lemma 4.29. *Eine antipodenerhaltende stetige Abbildung $S^1 \rightarrow S^1$ ist nicht nullhomotop.*

Beweis. Es sei $h: S^1 \rightarrow S^1$ stetig und antipodenerhaltend und sei $b_0 = 1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Indem wir h ggf. mit einer Drehung komponieren, können wir ohne Einschränkung $h(b_0) = b_0$ annehmen. Wir zeigen, dass die induzierte Abbildung $h_*: \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \pi_1(S^1, b_0)$ injektiv ist. Nach Lemma 4.24 kann h dann nicht nullhomotop sein.

Es sei $q: S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^2$. In Aufgabe 4.9 haben wir gesehen, dass q eine Überlagerung ist. Insbesondere ist q offen (Lemma 4.10) und surjektiv und damit eine Quotientenabbildung. Da h antipodenerhaltend ist, gilt $q(h(-z)) = q(-h(z)) = q(h(z))$ für alle $z \in S^1$. Nach Satz 3.5 gibt es deshalb eine stetige Abbildung $k: S^1 \rightarrow S^1$ mit $k \circ q = q \circ h$, was heißt, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{h} & S^1 \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ S^1 & \xrightarrow{k} & S^1 \end{array}$$

Es gilt $k(b_0) = k(q(b_0)) = q(h(b_0)) = b_0$. Wir zeigen, dass der induzierte Homomorphismus $k_*: \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \pi_1(S^1, b_0)$ nicht-trivial ist. Sei \tilde{f} ein Weg in S^1 von b_0 nach $-b_0$ und sei $f = q \circ \tilde{f}$, eine Schleife in S^1 mit Basispunkt b_0 . Es gilt

$$k_*[f] = [k \circ q \circ \tilde{f}] = [q \circ h \circ \tilde{f}]$$

Dabei ist $h \circ \tilde{f}$ wieder ein Weg in S^1 von b_0 nach $-b_0$ und ein Lift von $q \circ h \circ \tilde{f}$. Damit kann $[q \circ h \circ \tilde{f}]$ nicht das triviale Element in $\pi_1(S^1, b_0)$ sein, denn sonst hätte der Lift ebenfalls den Endpunkt b_0 . Also ist $k_*: \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \pi_1(S^1, b_0)$ nicht die Nullabbildung und wegen $\pi_1(S^1, b_0) \cong \mathbb{Z}$ ist k_* damit bereits injektiv. Ferner ist q_* ebenfalls injektiv, denn es entspricht dem Homomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, k \mapsto 2k$. Also ist $k_* \circ q_* = q_* \circ h_*$ injektiv und damit auch h_* . \square

Satz 4.30. *Es gibt keine antipodenerhaltende Abbildung $S^2 \rightarrow S^1$.*

Beweis. Sei $g: S^2 \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung. Die obere Halbkugel $B = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$ ist homöomorph zu B^2 und ihr Rand ist die Äquatorlinie $S = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z = 0\}$, homöomorph zu S^1 . Die Einschränkung $h = g|_S$ ist nullhomotop nach Lemma 4.24. Nach dem vorangehenden Lemma kann h damit nicht antipodenerhaltend sein, g also ebenso wenig. \square

Korollar 4.31 (Satz von Borsuk-Ulam). *Zu jeder stetigen Abbildung $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt es einen Punkt $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Angenommen falsch, d.h. es gebe eine stetige Abbildung f mit $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^2$. Dann ist

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

eine stetige antipodenerhaltende Abbildung $S^2 \rightarrow S^1$, im Widerspruch zum vorangehenden Satz. \square

Eine berühmte Illustration dieses Satzes lautet so: Identifiziert man S^2 mit der Erdoberfläche und ist $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Funktion, die jedem Ort die aktuelle Temperatur und den aktuellen Luftdruck zuordnet², dann sagt der Satz von Borsuk-Ulam, dass es zu jeder Zeit einen Ort auf der Welt gibt, an dem Luftdruck und Temperatur genauso sind wie am Antipodenpunkt³. Diese Aussage ist auch ein überzeugendes Beispiel für einen reinen mathematischen Existenzbeweis. Der Satz von Borsuk-Ulam gibt keinerlei Anhaltspunkt dafür, wie man einen solchen Punkt bestimmt.

Auch die folgende Anwendung ist sehr anschaulich und hat etwas von einem mathematischen Puzzle.

²Es ist physikalisch plausibel, diese Funktion als stetig anzusehen.

³Der Antipodenpunkt von Konstanz liegt übrigens mitten im Südpazifik; siehe auch <http://www.antipodesmap.com>.

Satz 4.32 (Bisektionssatz). *Gegeben zwei beschränkte messbare Mengen in \mathbb{R}^2 , dann gibt es eine Gerade, die beide gleichzeitig halbiert.*

Beweis. Wir identifizieren \mathbb{R}^2 mit der Ebene $H = \{(x, y, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$. Seien A_1, A_2 zwei messbare Mengen in \mathbb{R}^2 . Für jedes u in \mathbb{R}^3 und $i \in \{1, 2\}$ sei $B_i(u) = \{x \in A_i \mid \langle x, u \rangle > 0\}$ die Menge der Punkte in A_i , die auf einer Seite der Ebene $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u \rangle = 0\}$ liegen, und sei $f_i(u) = \mu(B_i(u))$ der Flächeninhalt von $B_i(u)$ (innerhalb von H). Die Funktion $u \mapsto f_i(u)$ ist stetig. Für $u = (0, 0, 1)$ ist $B_i(u) = A_i$ und damit $f_i(u)$ der Flächeninhalt von A_i ; für $u = (0, 0, -1)$ gilt $B_i(u) = \emptyset$ und damit $f_i(u) = 0$. Allgemein gilt

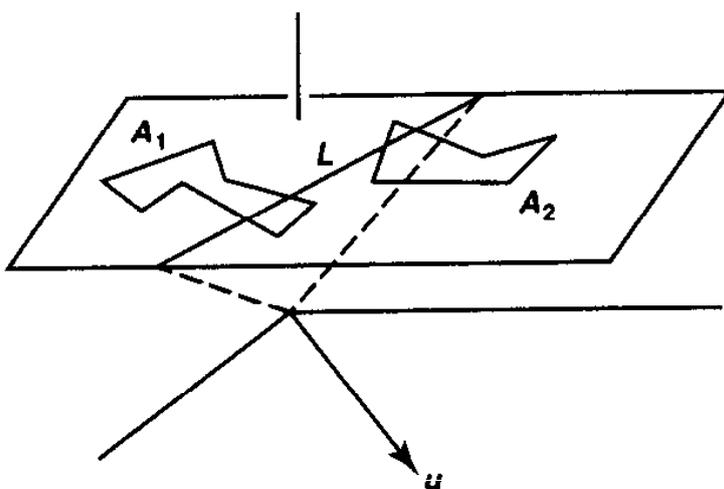


ABBILDUNG 17. [Mu, Fig. 57.2]

$$f_i(u) + f_i(-u) = \mu(A_i).$$

Betrachte nun die Abbildung $F: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(u) = (f_1(u), f_2(u))$. Nach dem Satz von Borsuk-Ulam gibt es einen Punkt $u \in S^2$ mit $F(u) = F(-u)$. Dies impliziert $f_i(u) = f_i(-u)$ und damit $f_i(u) = 1/2\mu(A_i)$, wie gewünscht. \square

Übung 4.21. Zeige: Ist $g: S^2 \rightarrow S^2$ stetig mit $g(x) \neq g(-x)$ für alle $x \in S^2$, so ist g surjektiv. (Hinweis: Benutze, dass das Komplement eines Punktes in S^2 zu \mathbb{R}^2 homöomorph ist.)

Der Satz von Borsuk-Ulam und verwandte Aussagen gelten auch in höherer Dimension, was wir aber nicht beweisen können. Genau wie beim Brouwerschen Fixpunktsatz folgt aber alles in ähnlicher Weise aus der höherdimensionalen Version von Lemma 4.29, wie folgende Aufgabe zeigt.

Übung 4.22. Verwende die Aussage „Für $n \geq 1$ ist eine stetige antipodenerhaltende Abbildung $S^n \rightarrow S^n$ niemals nullhomotop“, um folgendes zu zeigen.

- (a) Es gibt keine Retraktion $B^{n+1} \rightarrow S^n$.
- (b) Es gibt keine stetige antipodenerhaltende Abbildung $S^{n+1} \rightarrow S^n$.
- (c) (*Satz von Borsuk-Ulam*) Gegeben eine stetige Abbildung $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dann gibt es einen Punkt $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.
- (d) (*Schinkenbrötchensatz*) Gegeben n beschränkte messbare Mengen in \mathbb{R}^n , dann gibt es eine Hyperebene in \mathbb{R}^n , die jede von ihnen halbiert.

5. MANNIGFALTIGKEITEN UND ANALYTISCHE METHODEN

Im vorigen Kapitel haben wir die zweidimensionale Version des Brouwerschen Fixpunktsatzes bewiesen. Um diese und verwandte Aussagen auch in höheren Dimensionen zeigen zu können, braucht man bessere technische Hilfsmittel als wir sie bislang entwickelt haben. Grundsätzlich gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder man entwickelt die *algebraische Topologie* weiter; konkret bedeutet dies, dass die Fundamentalgruppe durch weitere (ebenfalls funktoriell zugeordnete) algebraische Objekte ergänzt wird, die Homologie- und Cohomologie-Gruppen. Oder man verwendet analytische Methoden, was auf das topologische Studium differenzierbarer Mannigfaltigkeiten hinausläuft. Beide Methoden sind auch technisch äußerst interessant. Mit der Analysis kommt man aber schneller zu Resultaten, so dass wir diesen Zugang für den Rest der Vorlesung wählen.

5.1. DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEITEN

Es seien $U \subset \mathbb{R}^k$ und $V \subset \mathbb{R}^\ell$ offene Mengen. Eine Abbildung $f: U \rightarrow V$ heißt **glatt**, wenn sie in jedem Punkt von U beliebig oft differenzierbar ist. Sind allgemeiner $X \subset \mathbb{R}^k$ und $Y \subset \mathbb{R}^\ell$ beliebige Teilräume, so heißt $f: X \rightarrow Y$ **glatt**, wenn jeder Punkt in X eine Umgebung U in \mathbb{R}^k besitzt, derart, dass f auf $U \cap X$ mit einer glatten Abbildung $U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ übereinstimmt. Ist f glatt mit glatter Umkehrabbildung, so heißt f ein **Diffeomorphismus**, und X und Y sind **diffeomorph**.

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^k$ heißt **glatte Mannigfaltigkeit der Dimension m** , wenn jeder Punkt von M eine Umgebung in M besitzt, die zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^m diffeomorph ist. Jede konkrete Wahl eines Diffeomorphismus $g: U \rightarrow g(U)$ zwischen einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^m$ und einer offenen Teilmenge $g(U) \subset M$ heißt eine **Karte** oder ein **Koordinatensystem**. Eine Familie $\{g_\alpha: U_\alpha \rightarrow g(U_\alpha)\}$ von Karten mit $M = \bigcup_\alpha g_\alpha(U_\alpha)$ heißt ein **Atlas** von M .

Beispiele 5.1. (1) Die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist eine glatte zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Betrachte dazu die Karte

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \quad g: \begin{cases} U & \rightarrow \\ (x, y) & \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \\ M \end{matrix}$$

mit glatter Umkehrabbildung $g^{-1}: (x, y, z) \mapsto (x, y)$. Das Bild $g(U)$ ist die „Nordhalbkugel“ $g(U) = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$. Analog ist

$$\tilde{g}: \begin{cases} U & \rightarrow M \\ (x, y) & \mapsto -\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

eine Karte für die „Südhalbkugel“. Indem man ferner die Rollen von x, y, z vertauscht erhält man insgesamt einen Atlas von S^2 .

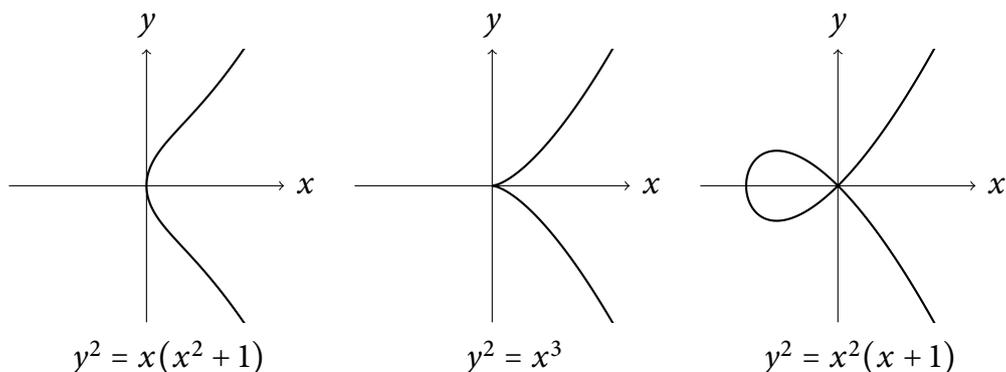
(2) Eine Menge von Punkten $M \subset \mathbb{R}^k$ ist genau dann eine 0-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, wenn sie diskret ist, also jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die zum Rest der Menge disjunkt ist.

(3) Es sei $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und sei

$$M = \{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) = 0\}.$$

Falls M nicht-leer und der Gradient $(\nabla f)(a)$ für kein $a \in M$ der Nullvektor ist, ist die Menge M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $k - 1$ in \mathbb{R}^k , eine **glatte Hyperfläche** (siehe Aufgabe 5.1).

Sei etwa $h \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom vom Grad 3 und $f(x, y) = y^2 - h(x)$. Wir betrachten die **ebene Kurve** $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$. Falls der Gradient ∇h in keinem Punkt von C verschwindet, so ist C eine glatte Hyperfläche (Kurve) in \mathbb{R}^2 . Ist dies nicht der Fall, so können zwei Dinge schief gehen: (a) Ist $h = x^3$ (die *Neilsche Parabel*), so gilt $p = (0, 0) \in C$ und $\nabla(f)(p) = 0$. Die Abbildung $t \mapsto (t^2, t^3)$ ist ein Homöomorphismus von \mathbb{R} auf die Kurve C mit Umkehrabbildung $(x, y) \mapsto \sqrt{x}$. Diese Umkehrabbildung ist aber im Ursprung nicht differenzierbar und tatsächlich ist C in keiner Umgebung von p diffeomorph zu einem offenen Intervall in \mathbb{R} . (b) Ist $h = x^2(x + 1)$ (die *Schleifenkubik*), so ist C in keiner Umgebung von p auch nur homöomorph zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R} . Denn ist V eine ausreichend kleine Umgebung von p in \mathbb{R}^2 (etwa $V = B(p, 1/2)$), so ist $V \cap C$ zusammenhängend, aber $V \cap (C \setminus \{P\})$ besitzt vier Zusammenhangskomponenten. Eine offene zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R} ist dagegen ein Intervall und zerfällt nur in zwei Komponenten, wenn man einen Punkt herausnimmt.



Bei der Neilschen Parabel liegt das Problem also in der Differenzierbarkeit, während es bei der Schleifenkubik bereits an der Topologie scheitert.

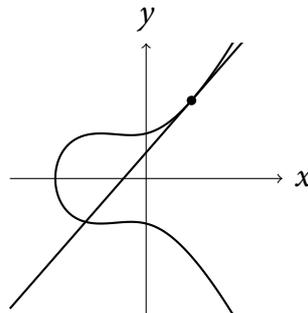
Übung 5.1. Es sei $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und sei

$$M = \{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) = 0\}.$$

Zeige: Falls M nicht-leer und der Gradient $(\nabla f)(a)$ für kein $a \in M$ der Nullvektor ist, ist die Menge M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $k - 1$ in \mathbb{R}^k . (*Hinweis:* Verwende den Satz über implizite Funktionen, um eine der Koordinaten durch die anderen auszudrücken.)

Als nächstes diskutieren wir den Differentialkalkül für Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten. Die Ableitung einer glatten Abbildung $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ in einem Punkt $u \in \mathbb{R}^k$ ist eine lineare Abbildung $f'(u): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, beschrieben durch die Jacobi-Matrix. Ist f ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen $U \rightarrow f(U)$, so ist f' in jedem Punkt von u invertierbar. Insbesondere muss $k = \ell$ gelten. Der Satz über die Umkehrfunktion ist gerade die umgedrehte Aussage: Ist $f'(u)$ invertierbar, so besitzt u eine Umgebung U , die diffeomorph auf $f(U)$ abgebildet wird.

Es sei nun $M \subset \mathbb{R}^k$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $m \leq k$. Sei $x \in M$ und sei $g: U \rightarrow M$ eine Karte von M um x mit $g(u) = x$. Fassen wir g als Abbildung von der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^m$ nach \mathbb{R}^k auf, so hat g die Ableitung $g'(u): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$. Da g ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist, ist $g'(u)$ injektiv (siehe Aufgabe 5.2). Das Bild der linearen Abbildung $g'(u)$ ist daher ein linearer Teilraum der Dimension m in \mathbb{R}^k . Dieser heißt der **Tangentialraum von M im Punkt x** und wird mit TM_x bezeichnet. Zur geometrischen Veranschaulichung betrachtet man auch den affinen Unterraum $x + TM_x$, der durch den Punkt x geht und dort an die Mannigfaltigkeit M tangential anliegt.



Tangentialraum an die Kurve $y^2 = x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ im Punkt $(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}})$

Damit diese Definition sinnvoll ist, muss man sich allerdings noch überzeugen, dass TM_x nicht von der Wahl der Karte g abhängt. Ist $h: V \rightarrow M$ eine weitere Karte mit $h(v) = x$, so betrachten wir den **Kartenwechsel** $h^{-1} \circ g$. Dieser bildet die Umgebung $U_1 = g^{-1}(g(U) \cap h(V))$ von u diffeomorph auf die Umgebung $V_1 = h^{-1}(g(U) \cap h(V))$ von v ab. Auf U_1 gilt dann $g = h \circ (h^{-1} \circ g)$ und damit nach der Kettenregel $g'(u) = h'(v) \circ (h^{-1} \circ g)'(u)$, so dass $g'(u)$ und $h'(v)$ das gleiche Bild haben. Damit ist gezeigt, dass TM_x wohldefiniert ist.

Übung 5.2. Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Abbildung auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$. Zeige: Ist f ein Diffeomorphismus von U auf sein Bild, so ist $f'(x)$ für jeden Punkt $x \in U$ injektiv.

Seien nun $M \subset \mathbb{R}^k$ und $N \subset \mathbb{R}^\ell$ zwei glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n und

$$f: M \rightarrow N$$

eine glatte Abbildung mit $f(x) = y$, $x \in M$. Die Ableitung

$$df_x: TM_x \rightarrow TN_y$$

ist wie folgt definiert. Da f glatt ist, gibt es eine Umgebung W von x und eine glatte Abbildung $F: W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, die auf $W \cap M$ mit f übereinstimmt. Wir definieren df_x durch $F'(x)$.

Damit diese Definition sinnvoll ist, müssen wir zeigen, dass df_x nicht von der Wahl von F abhängt und dass das Bild von TM_x unter $F'(x)$ tatsächlich in TN_y enthalten ist. Wähle dazu Karten $g: U \rightarrow M$ und $h: V \rightarrow N$ mit $g(u) = x$ und $h(v) = y$. Indem wir U gegebenenfalls verkleinern, können wir $g(U) \subset W$ und $f(g(U)) \subset h(V)$ annehmen. Dann ist $h^{-1} \circ f \circ g: U \rightarrow V$ eine glatte Abbildung. Wir erhalten ein kommutatives Rechteck von glatten Abbildungen zwischen offenen Mengen und das Entsprechende für die Ableitungen:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^\ell \\ g \uparrow & & \uparrow h \\ U & \xrightarrow{h^{-1} \circ f \circ g} & V \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{F'(x)} & \mathbb{R}^\ell \\ g'(u) \uparrow & & \uparrow h'(v) \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(h^{-1} \circ f \circ g)'(u)} & \mathbb{R}^n \end{array} .$$

Daraus folgt direkt, dass $F'(x)$ den Unterraum $TM_x = \text{Bild}(g'(u))$ nach $TN_y = \text{Bild}(h'(v))$ abbildet. Es folgt auch die Unabhängigkeit von F , denn eingeschränkt auf ihr Bild TM_x besitzt die injektive lineare Abbildung $g'(u)$ eine Umkehrabbildung $(g'(u))^{-1}$, so dass wir $F'(x)$ auf TM_x durch $h'(v) \circ (h^{-1} \circ f \circ g)'(u) \circ (g'(u))^{-1}$ ersetzen können. Damit ist alles gezeigt.

Die Ableitung als Abbildung zwischen den Tangentialräumen von Mannigfaltigkeiten genügt denselben Regeln wie die übliche Ableitung. Insbesondere gelten die Kettenregel $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$ und es ist $d(\text{id}_M)_x = \text{id}_{TM_x}$. Daraus folgt: Ist $f: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus von glatten Mannigfaltigkeiten, so ist df_x für jedes $x \in M$ ein Isomorphismus, und M und N besitzen die gleiche Dimension.

Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n . Ein Punkt $x \in M$ heißt ein **regulärer Punkt** von f , wenn die lineare Abbildung $df_x: TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ surjektiv ist, also den Rang n hat. Andernfalls heißt x ein **kritischer Punkt**. Ist x ein kritischer Punkt von f , so heißt $f(x)$ ein **kritischer Wert** von f . Ein **regulärer Wert** von f ist ein Punkt $y \in N$ derart, dass alle Punkte der Faser $f^{-1}(y)$ regulär sind.

Im Fall $n = m$ ist $x \in M$ nach dieser Definition genau dann ein regulärer Punkt von f , wenn df_x ein Isomorphismus ist. Wie zuvor folgt dann aus dem Satz über die Umkehrfunktion, dass x eine Umgebung U besitzt, die von f diffeomorph auf $f(U)$ abgebildet wird.

Übung 5.3. Sind $M, M' \subset \mathbb{R}^k$ glatte Mannigfaltigkeiten mit $M' \subset M$, so gilt $TM'_x \subset TM_x$ für alle $x \in M'$.

Die folgende Aussage verallgemeinert Aufgabe 5.1.

Lemma 5.2. Ist $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n mit $m \geq n$ und ist $y \in N$ ein regulärer Wert von f , so ist $M' = f^{-1}(y)$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $m - n$. Für jedes $x \in M'$ ist dabei TM'_x gerade der Kern der Abbildung $df_x: TM_x \rightarrow TN_y$.

Beweis. Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ und $N \subset \mathbb{R}^\ell$, $x \in f^{-1}(y)$. Wir müssen zeigen, dass x eine Umgebung besitzt, die zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^{m-n} diffeomorph ist. Da x ein regulärer Punkt von f ist, hat die lineare Abbildung df_x den Rang n und $\text{Kern}(df_x)$ damit die Dimension $m - n$. Wähle eine lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$, die auf dem Unterraum $\text{Kern}(df_x) \subset TM_x \subset \mathbb{R}^k$ injektiv ist. (Wähle dazu etwa eine Basis v_1, \dots, v_{m-n} von $\text{Kern}(df_x)$ und ergänze diese zu einer Basis v_1, \dots, v_k von \mathbb{R}^k ; setze dann $L(v_i) = e_i$ für $i = 1, \dots, m - n$ und $L(v_i) = 0$ für $i = m - n + 1, \dots, k$.) Betrachte nun die Abbildung

$$F: M \rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}, \quad F(\xi) = (f(\xi), L(\xi)).$$

Dann gilt

$$dF_x(v) = (df_x(v), L(v)),$$

für alle $v \in TM_x$, so dass dF_x nach Wahl von L injektiv ist. Also besitzt x eine Umgebung U in M , die von F diffeomorph auf $F(U) \subset N \times \mathbb{R}^{m-n}$ abgebildet wird. Setze $V = (\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap F(U)$, dann ist V diffeomorph zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^{m-n} und $f^{-1}(y) \cap U = F^{-1}(V)$ ist die gesuchte Umgebung von x .

Für den Zusatz über Tangentialräume, betrachte das kommutative Rechteck

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{c} & M \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \{y\} & \xrightarrow{c} & N \end{array} \quad \begin{array}{ccc} TM'_x & \xrightarrow{c} & TM_x \\ df_x \downarrow & & \downarrow df_x \\ \{0\} & \xrightarrow{c} & TN_y \end{array}$$

Dies zeigt, dass $df_x: TM_x \rightarrow TN_y$ den Unterraum TM'_x auf Null abbildet, also $TM'_x \subset \text{Kern}(df_x)$. Andererseits gilt $\dim TM'_x = m - n = \dim TM_x - \dim TN_y = \dim \text{Kern}(df_x)$, da df_x surjektiv ist. Also $TM'_x = \text{Kern}(df_x)$, wie behauptet. \square

Beispiel 5.3. Die Einheitsphäre $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, denn 1 ist ein regulärer Wert der Abbildung $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$. Der Tangentialraum an einen Punkt $x \in M$ ist durch

$$TM_x = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (\nabla f)(x)^T \cdot v = 0\}$$

gegeben, also durch das orthogonale Komplement der Gradientenrichtung.

Die offene Einheitskugel in \mathbb{R}^n ist natürlich eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, denn sie ist selbst eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Die abgeschlossene Einheitskugel ist dagegen keine glatte Mannigfaltigkeit. Um solche Mengen trotzdem behandeln zu können, brauchen wir eine Verallgemeinerung: Eine **m -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit Rand** ist eine Teilmenge M von \mathbb{R}^k derart, dass jeder Punkt von M eine Umgebung in M besitzt, die zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0\}$ (ein abgeschlossener Halbraum) diffeomorph ist. Eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ist also im allgemeinen keine Mannigfaltigkeit. (Die umgekehrte Aussage ist dagegen leicht einzusehen; siehe Aufgabe 5.4.) Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, so ist der **Rand** ∂M die Menge aller Punkte in M , die unter den Karten von M zu Punkten in der Hyperebene $\partial\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_m = 0\}$ korrespondieren. Beachte, dass dies eine neue *Definition* des Randes darstellt, speziell für Mannigfaltigkeiten mit Rand. Sie stimmt nicht immer mit der allgemeinen Definition des Randes einer Teilmenge von \mathbb{R}^k überein (siehe Aufgabe 5.6). Entsprechend ist das **Innere** von M die Menge $M \setminus \partial M$.

Übung 5.4. Überzeuge Dich, dass jede glatte Mannigfaltigkeit auch eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ist.

Übung 5.5. Überzeuge Dich, dass der Rand einer glatten Mannigfaltigkeit mit Rand wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl von Karten abhängt.

Übung 5.6. Gib ein Beispiel einer Mannigfaltigkeit mit Rand $M \subset \mathbb{R}^k$, derart, dass ∂M mit dem üblichen topologischen Rand als Teilmenge von \mathbb{R}^k übereinstimmt. Gib ein weiteres Beispiel, in dem dies nicht der Fall ist.

Übung 5.7. Es sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine m -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeige:
 (a) Das Innere von M ist eine m -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit (ohne Rand).
 (b) Der Rand ∂M ist entweder leer oder eine $m - 1$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit (ohne Rand).

Viele Aussagen über glatte Mannigfaltigkeiten gelten genauso oder in ähnlicher Weise für glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand. Insbesondere hat Lemma 5.2 ein nützliches Analogon.

Lemma 5.4. Sei M eine m -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit (ohne Rand) und $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, für die 0 ein regulärer Wert ist. Dann ist

$$M' = \{x \in M \mid g(x) \geq 0\}$$

eine m -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = g^{-1}(0)$.

Beweis. Analog zu Lemma 5.2 (Übung). □

Beispiel 5.5. Die abgeschlossene Einheitskugel $B^n \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, denn 0 ist ein regulärer Wert der Funktion $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2$ und es gilt $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \geq 0\}$. Dabei ist $\partial B^n = S^{n-1}$.

Das folgende Lemma ist ebenfalls eine Variante von Lemma 5.2.

Lemma 5.6. *Es sei M eine m -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, N eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, $m \geq n$, und $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Ist $y \in N$ ein regulärer Wert sowohl von f als auch von $f|_{\partial M}$, so ist $f^{-1}(y)$ eine glatte $(m - n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Dabei gilt*

$$\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M.$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für $M = \mathbb{H}^m$ und $N = \mathbb{R}^n$ zu beweisen (Check!). Sei $y \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert und $x \in f^{-1}(y)$. Ist x ein innerer Punkt von M , so folgt die Aussage aus Lemma 5.2. Angenommen $x \in \partial \mathbb{H}^m$. Es sei g eine glatte Abbildung, die in einer offenen Umgebung U von x in \mathbb{R}^m definiert ist und auf $U \cap \mathbb{H}^m$ mit f übereinstimmt. Da x kein kritischer Punkt von g ist, können wir U hinreichend klein wählen, damit g keine kritischen Punkte auf U hat. Dann ist $g^{-1}(y)$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $m - n$ in \mathbb{R}^m .

Betrachte die Projektion $\pi: g^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(\xi_1, \dots, \xi_m) = \xi_m$. Behaupte, dass 0 ein regulärer Wert von π ist. Denn der Tangentialraum von $g^{-1}(y)$ in einem Punkt $x \in g^{-1}(y) \cap \pi^{-1}(0)$ ist nach Lemma 5.2 der Kern der Abbildung $dg_x = df_x: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Es gilt $T\partial \mathbb{H}_x^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ und nach Voraussetzung ist x ein regulärer Punkt von $f|_{\partial \mathbb{H}^m}$. Deshalb kann der Kern von df_x nicht vollständig in $T\partial \mathbb{H}^m = \text{Kern}(d\pi_x)$ enthalten sein. Nun können wir Lemma 5.4 auf $g^{-1}(y)$ und π anwenden und sehen, dass $g^{-1}(y) \cap \mathbb{H}^m = f^{-1}(y) = \{x \in g^{-1}(y) \mid \pi(x) \geq 0\}$ eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand $g^{-1}(y) \cap \pi^{-1}(0) = f^{-1}(y) \cap \partial \mathbb{H}^m$ ist. \square

5.2. KLASSIFIKATION EINDIMENSIONALER MANNIGFALTIGKEITEN

In diesem Abschnitt bestimmen wir alle zusammenhängenden eindimensionalen glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand bis auf Diffeomorphismus. Diese Klassifikation werden wir im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes verwenden.

Satz 5.7. *Eine glatte zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist diffeomorph zu S^1 oder einem Intervall in \mathbb{R} .*

Insbesondere ist damit jede kompakte zusammenhängende eindimensionale glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand diffeomorph zu S^1 .

Übung 5.8. Sei $X \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist X diffeomorph zu einem der drei Intervalle $(0, 1)$, $(0, 1]$ oder $[0, 1]$.

Für den Beweis von Satz 5.7 verschafft man sich spezielle Karten, deren Zusammenspiel überschaubar wird. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $M \subset \mathbb{R}^k$ eine glatte eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine Abbildung $f: I \rightarrow M$ heißt eine **Parametrisierung nach Bogenlänge**, falls f ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von M ist und der Vektor $f'(s) = df_s(1) \in TM_{f(s)}$ für jedes $s \in I$ die

Länge 1 hat. (Beachte, dass I nicht offen zu sein braucht, wenn M eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist.) Ist $f: I \rightarrow M$ eine beliebige Karte, so gibt es eine *Umparametrisierung* $\tilde{f}: \tilde{I} \rightarrow M$ mit $f(I) = \tilde{f}(\tilde{I})$, wobei \tilde{f} eine Parametrisierung nach Bogenlänge ist (siehe Aufgabe 5.9). Wir können also stets annehmen, dass die Karten einer glatten eindimensionalen Mannigfaltigkeit Parametrisierungen nach Bogenlänge sind.

Übung 5.9. Sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Kurve. Sei $t_0 \in I$ und setze

$$p(t) = \int_{t_0}^t \|f'(x)\| dx$$

und $\tilde{I} = p(I)$. Zeige: Die Funktion $p: I \rightarrow \tilde{I}$ ist glatt und streng monoton wachsend mit glatter Umkehrfunktion. Weiter ist durch $\tilde{f}(t) = f(p^{-1}(t))$ eine glatte Kurve $\tilde{f}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $\tilde{f}(\tilde{I}) = f(I)$ und $\|\tilde{f}'(t)\| = 1$ für alle $s \in \tilde{I}$ gegeben.

Lemma 5.8. Sei M eine glatte zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit und seien $f: I \rightarrow M$ und $g: J \rightarrow M$ Parametrisierungen nach Bogenlänge. Es gelten:

- (1) $f(I) \cap g(J)$ hat höchstens zwei Zusammenhangskomponenten.
- (2) Ist $f(I) \cap g(J)$ zusammenhängend und nicht leer, so lässt sich f zu einer Parametrisierung nach Bogenlänge $\tilde{f}: \tilde{I} \rightarrow f(I) \cup g(J)$ fortsetzen. (Das heißt, es gilt $I \subset \tilde{I}$ und $\tilde{f}(s) = f(s)$ für alle $s \in I$).
- (3) Hat $f(I) \cap g(J)$ zwei Komponenten, so ist M diffeomorph zu S^1 .

Beweis. Falls $f(I) \cap g(J) = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist $g^{-1} \circ f$ ein Diffeomorphismus von $U = f^{-1}(g(J)) \subset I$ nach $V = g^{-1}(f(I)) \subset J$. Da es sich um Parametrisierungen nach Bogenlänge handelt, gilt $(g^{-1} \circ f)'(s) = \pm 1$ für alle $s \in f^{-1}(g(J))$ (siehe Aufgabe 5.10). Betrachte

$$\Gamma = \{(s, t) \in I \times J \mid f(s) = g(t)\}.$$

Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge des Rechtecks $I \times J$ und stimmt mit dem Graph der Funktion $g^{-1} \circ f$ überein.

Wie kann der Graph Γ aussehen? Da $g^{-1} \circ f$ überall Ableitung ± 1 hat, besteht Γ aus Geradensegmenten mit Steigung 1 oder -1 . Außerdem ist $g^{-1} \circ f$ lokal ein Diffeomorphismus. Deshalb können die Geradensegmente nicht im Inneren des Rechtecks $I \times J$ enden, sondern nur jeweils an einem der vier Ränder. Daraus folgt, dass Γ höchstens zwei Zusammenhangskomponenten haben kann.

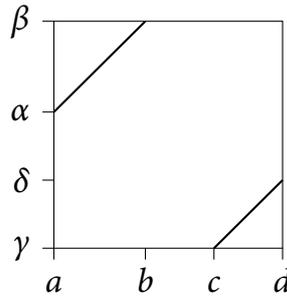
Falls Γ nur eine Zusammenhangskomponente hat, so setze $g^{-1} \circ f$ also zu einer affin-linearen Abbildung $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fort (indem man das Geradensegment Γ in $I \times J$ in die ganze Ebene fortsetzt). Setze

$$\tilde{f}: I \cup L^{-1}(J) \rightarrow M, s \mapsto \begin{cases} f(s) & s \in I \\ g(L(s)) & s \in L^{-1}(J). \end{cases}$$

Für $s \in I \cap L^{-1}(J)$ gilt $g(L(s)) = g(g^{-1}(f(s))) = f(s)$. Daher ist \tilde{f} wohldefiniert und stetig und liefert die in (2) behauptete Fortsetzung von f .

Es bleibt der Fall, dass Γ zwei Zusammenhangskomponenten hat. Das Vorzeichen von $(g^{-1} \circ f)'$ ist auf U konstant (Aufgabe 5.10). Wir nehmen an, dass $(g^{-1} \circ f)'(s) = 1$ für alle $s \in U$ gilt; der Fall mit negativem Vorzeichen geht analog.

Sei etwa $I = (a, d)$ und $U = (a, b) \cup (c, d)$, $a < b \leq c < d$ und $J = (\gamma, \beta)$, $V = (\gamma, \delta) \cup (\alpha, \beta)$, $\gamma < \delta \leq \alpha < \beta$. (Falls I, J nicht offen sind, gehören die Intervallgrenzen ggf. dazu.) Die Systematik der Bezeichnung wird durch folgende Abbildung erklärt:



Es ist $(g^{-1} \circ f)(t) = t + \alpha - a$ für $t \in (a, b)$ und $(g^{-1} \circ f)(t) = t + \gamma - c$ für $t \in (c, d)$. Indem wir das Intervall J verschieben, können wir ohne Einschränkung $\gamma = c$ und damit $\delta = d$ annehmen, so dass

$$a < b \leq c < d \leq \alpha < \beta$$

gilt. Nun können wir den in (3) geforderten Diffeomorphismus $h: S^1 \rightarrow M$ explizit hinschreiben: Setze $\vartheta = \frac{2\pi}{\alpha-a}t$ und schreibe

$$h(\cos \vartheta, \sin \vartheta) = \begin{cases} f(t) & \text{für } t \in (a, d) \\ g(t) & \text{für } t \in (c, \beta). \end{cases}$$

Die Abbildung h ist wohldefiniert, denn für $t \in (c, d) \subset U$ gilt $f(t) = g(g^{-1}(f(t))) = g(t + \gamma - c) = g(t)$. Da f und g Diffeomorphismen sind, ist auch h ein Diffeomorphismus auf sein Bild. Außerdem ist $h(S^1)$ abgeschlossen, da S^1 kompakt ist, und offen, da $h(S^1) = f(I) \cup g(J)$. Da M zusammenhängend ist, folgt daraus $h(S^1) = M$. Damit ist alles bewiesen. \square

Übung 5.10. Sei M eine eindimensionale glatte Mannigfaltigkeit, $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $f: I \rightarrow M$, $g: J \rightarrow M$ Parametrisierungen nach Bogenlänge. Zeige: Für jedes $s \in g^{-1}(f(I))$ gilt $(g^{-1} \circ f)'(s) = \pm 1$. Das Vorzeichen hängt dabei nicht von s ab.

Mit Lemma 5.8 ist die wesentliche Arbeit für den Klassifikationssatz getan.

Beweis von Satz 5.7. Es sei M eine glatte zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit und sei $f: I \rightarrow M$ eine Karte von M . Zunächst können wir nach Reparametrisierung annehmen, dass f eine Parametrisierung nach Bogenlänge ist. Ferner können wir annehmen, dass f maximal ist in folgendem Sinn: Es gibt keine Fortsetzung von f auf ein größeres Intervall $I' \supset I$.

Falls M diffeomorph zu S^1 ist, so sind wir fertig. Andernfalls zeigen wir, dass f surjektiv ist und damit ein Diffeomorphismus zwischen I und M . Angenommen

falsch, dann hat $f(I)$ in M einen Randpunkt $x \notin f(I)$. Wähle eine Karte $g: J \rightarrow M$ mit $x \in g(J)$ und wende Lemma 5.8 an. Da M nicht homöomorph zu S^1 ist, sind wir im zweiten Fall des Lemmas, so dass sich f zu einer Parametrisierung von $f(I) \cup g(J)$ fortsetzen lässt, ein Widerspruch. \square

Übung 5.11. Betrachte die Abbildung

$$f: \begin{cases} B^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto xy \end{cases}.$$

Bestimme die regulären Punkte und regulären Werte von f . Bestimme die Faser $f^{-1}(y)$, wenn $y \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert ist, bis auf Diffeomorphismus. Welche Fasern gibt es noch?

5.3. RETRAKTIONEN UND DER BROUWERSCHE FIXPUNKTSATZ

In den Übungen haben wir gesehen (Aufgabe 4.22), dass der Brouwersche Fixpunktsatz aus der Nicht-Existenz einer Retraktion der Einheitskugel auf ihren Rand folgt. Wir beweisen diese Aussage nun im glatten Fall, und zwar für beliebige glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand.

Satz 5.9. *Es sei M eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gibt es keine glatte Retraktion von M auf ∂M .*

Beweis. Angenommen falsch, dann gibt es also eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow \partial M$ mit $f|_{\partial M} = \text{id}_{\partial M}$. Es sei $y \in \partial M$ ein regulärer Wert von f . Dass ein solcher überhaupt existiert, ist im Moment noch unbewiesen. Dies folgt aus dem Satz von Sard, ein wichtiger Satz der Analysis, den wir im nächsten Abschnitt diskutieren (Kor. 5.15). Für den Moment setzen wir die Existenz eines regulären Werts einfach voraus. Da außerdem jeder Punkt von ∂M ein regulärer Wert der Identität ist, können wir dann Lemma 5.6 anwenden: $f^{-1}(y)$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand

$$\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M = \{y\}.$$

Da M kompakt ist, ist auch $f^{-1}(y)$ kompakt. Daher hat $f^{-1}(y)$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten und nach dem Klassifikationssatz 5.7 ist $f^{-1}(y)$ damit eine endliche Vereinigung von Kreisen und kompakten Intervallen. Daraus folgt aber, dass $\partial f^{-1}(y)$ aus einer geraden Anzahl von Punkten besteht. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. \square

Korollar 5.10. *Für $n \geq 1$ existiert keine glatte Retraktion von B^n auf S^{n-1} .* \square

Neben der Kreisscheibe ist das Moebiusband ein weiteres Beispiel für eine kompakte zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Explizit ist

$$M = \left\{ (x, y, z)(u, v) \mid u \in \mathbb{R}, v \in [-1, 1] \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

ein Moebiusband, gegeben durch die glatte Parametrisierung

$$x(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u, \quad y(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, \quad z(u, v) = \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2}.$$

Der Rand ∂M ist diffeomorph zu S^1 . Genau wie die Kreisscheibe ist das Moebiusband nach dem gerade bewiesenen Satz nicht auf diesen Rand retrahierbar.



Ein Moebiusband (Quelle: JoshDif, Wikimedia Commons)

Satz 5.11. *Jede glatte Abbildung $B^n \rightarrow B^n$ hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Angenommen falsch, dann gibt es also eine glatte Abbildung $g: B^n \rightarrow B^n$ mit $g(x) \neq x$ für alle $x \in B^n$. Wir konstruieren eine glatte Retraktion von B^n auf S^{n-1} . Für $x \in B^n$ schneidet die Verbindungsgerade zwischen x und $g(x)$ die Sphäre S^{n-1} in zwei Punkten. Sei $f(x)$ derjenige, der näher bei x liegt. Dann ist $f: B^n \rightarrow S^{n-1}$ die gesuchte Retraktion. Um dies zu verstehen, rechnen wir die Abbildung f explizit aus. Setze

$$u(x) = \frac{x - g(x)}{\|x - g(x)\|},$$

dann ist die Verbindungsgerade zwischen x und $g(x)$ die Menge $\{x + tu(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Die Schnittpunkte mit S^{n-1} sind die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $\|x + tu(x)\|^2 = 1$ in t . Dies bedeutet

$$t^2 + 2\langle x, u(x) \rangle t + \langle x, x \rangle - 1 = 0.$$

(Beachte, dass der Koeffizient von t^2 gerade $\langle u(x), u(x) \rangle = 1$ ist.) Nach der Lösungsformel hat dieses Polynom die beiden Nullstellen

$$t = -\langle x, u(x) \rangle \pm \sqrt{1 - \langle x, x \rangle + \langle x, u(x) \rangle^2}.$$

Der Punkt, der näher bei x liegt, entspricht dabei der Wahl des positiven Vorzeichens. Wir setzen also

$$\begin{aligned} t(x) &= -\langle x, u(x) \rangle + \sqrt{1 - \langle x, x \rangle + \langle x, u(x) \rangle^2} \\ f(x) &= x + t(x) \cdot u(x). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist klar, dass f von B^n nach S^{n-1} abbildet. Für $x \in S^{n-1}$ gilt $\langle x, x \rangle = 1$ und damit $t(x) = 0$, also $f(x) = x$. Ferner ist f glatt, denn der Ausdruck unter der Wurzel in $t(x)$ ist positiv: Für x im Innern von B^n ist dies klar wegen $\langle x, x \rangle < 1$; für $x \in S^{n-1}$ gilt $\langle x, x \rangle = 1$ und

$$\langle x, u(x) \rangle = \frac{1 - \langle x, g(x) \rangle}{\|x - g(x)\|} \neq 0,$$

denn $\langle x, g(x) \rangle = 1$ würde $x = g(x)$ implizieren. Damit ist alles bewiesen. \square

Den vollen Fixpunktsatz erhalten wir nun durch Approximation.

Korollar 5.12 (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung $B^n \rightarrow B^n$ besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Es sei $g: B^n \rightarrow B^n$ eine stetige Abbildung. Wir approximieren g durch eine glatte Abbildung. Da B^n kompakt ist, existiert nach dem Weierstraßschen Approximationssatz für jedes $\varepsilon > 0$ eine polynomiale Abbildung $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\|g(x) - p(x)\| < \varepsilon$ für alle $x \in B^n$. Die Abbildung p ist nun glatt, aber sie bildet B^n nicht zwingend nach B^n ab. Daher setzen wir

$$q(x) = \frac{p(x)}{1 + \varepsilon}.$$

Für $x \in B^n$ gilt dann $\|p(x)\| = \|p(x) - g(x) + g(x)\| \leq \|p(x) - g(x)\| + \|g(x)\| \leq 1 + \varepsilon$, also $\|q(x)\| \leq 1$ und damit $q(x) \in B^n$. Außerdem gilt $\|q(x) - p(x)\| < \varepsilon$ und damit $\|q(x) - g(x)\| < 2\varepsilon$ (Check!).

Angenommen es gelte $g(x) \neq x$ für alle $x \in B^n$. Da B^n kompakt ist, nimmt die Funktion $x \mapsto \|g(x) - x\|$ auf B^n ihr Minimum $\mu > 0$ an. Wähle nun q wie oben mit $\|q(x) - g(x)\| < \mu$ für alle $x \in B^n$, dann gilt $\|q(x) - x\| = \|q(x) - g(x) + g(x) - x\| \geq \|g(x) - x\| - \|q(x) - g(x)\| > \mu - \mu = 0$. Also besitzt auch q keinen Fixpunkt, im Widerspruch zu Satz 5.11. \square

5.4. DER SATZ VON SARD

Für den analytischen Zugang zum Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatz war die Existenz regulärer Werte von glatten Abbildungen entscheidend. Diese folgt aus dem Satz von Sard, den wir in diesem Abschnitt diskutieren.

Eine Teilmenge $Z \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Nullmenge**, wenn sie Lebesgue-Maß 0 hat. Explizit bedeutet dies, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Überdeckung von Z durch eine Folge von Quadern $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ existiert derart, dass $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i) < \varepsilon$, wobei $\lambda(Q_i)$ als Volumen des Quaders, also einfach als Produkt der Kantenlängen gegeben ist.

Übung 5.12. Zeige:

- Jede abzählbare Teilmenge von \mathbb{R}^n ist eine Nullmenge.
- Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder ein Nullmenge.
- Ein Beispiel einer überabzählbaren Nullmenge ist das aus der Analysis bekannte *Cantorsche Diskontinuum*.

Lemma 5.13. *Jede Nullmenge besitzt leeres Inneres.*

Beweis. Hat eine Menge $Z \subset \mathbb{R}^n$ nicht-leeres Inneres, so enthält sie einen offenen Quader (siehe auch Prop. 1.3). Da dieser keine Nullmenge ist, kann auch Z keine Nullmenge sein. \square

Der Satz von Sard (aufbauend auf Arbeiten von Morse) besagt gerade, dass die Menge der kritischen Werte einer glatten Abbildung eine Nullmenge ist.

Satz 5.14 (Morse-Sard). *Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ und sei*

$$C = \{x \in U \mid \text{Rang}(f'(x)) < n\}.$$

Dann ist $f(C)$ eine Nullmenge.

Anschaulich betrachtet besteht ein grundsätzlicher Unterschied zwischen den Fällen $m < n$ und $m \geq n$. Falls $m < n$, so hat $f'(x)$ natürlich in jedem Punkt einen Rang kleiner als n . Der Satz sagt dann nur, dass $f(M)$ eine Nullmenge ist. Dieser Fall ist vergleichsweise einfach, wird aber im Beweis nicht gesondert behandelt.

Korollar 5.15. *Es sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand, wobei $\dim N \leq \dim M$. Dann ist die Menge der regulären Werte von f dicht in N .*

Beweis. Sei $m = \dim M$, $n = \dim N$ und betrachte Karten $g: U \rightarrow M$ und $h: V \rightarrow N$ mit $f(g(U)) \cap h(V) \neq \emptyset$. Nach Satz 5.14 ist die Menge der kritischen Werte von $h^{-1} \circ f \circ g$ eine Nullmenge in V . Indem man nun M durch abzählbar viele Karten überdeckt (siehe Aufgabe 5.13), sieht man, dass die Menge der kritischen Werte von f in $h(V)$ unter h einer abzählbaren Vereinigung von Nullmengen in V , und damit einer Nullmenge, entspricht. Die Menge der kritischen Werte hat also leeres Inneres (Lemma 5.13) und damit ist ihr Komplement, die Menge der regulären Werte, dicht. Da dies in jedem Kartengebiet von N gilt, erhält man insgesamt die Aussage. \square

In unserer Anwendung im vorigen Abschnitt haben wir tatsächlich nur die Existenz eines einzigen regulären Werts gebraucht. Der Beweis des Satzes von Sard ist recht aufwendig und muss in der Vorlesung aus Zeitgründen entfallen. (Man könnte sagen, er gehört auch eher in die Analysis, als in die Topologie.) Der Vollständigkeit halber reproduzieren wir hier im Skript aber den Beweis aus [Mi].

Beweis von Satz 5.14. Der Beweis beinhaltet eine Induktion nach m . Dabei ist die Behauptung für $m = 0$, $n \geq 1$ sinnvoll und offensichtlich richtig. Weiter brauchen wir die folgende Aussage (die aus dem Satz von Fubini folgt): Eine Teilmenge M von \mathbb{R}^n ist genau dann eine Nullmenge, wenn für jede Hyperebene der Form

$$\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} = \{(t, x_2, \dots, x_n) \mid (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

der Durchschnitt $H_t \cap M$ eine Nullmenge in $H_t \cong \mathbb{R}^{n-1}$ ist.

Es sei C die Menge der kritischen Punkte von f . Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei weiter C_k die Menge aller Punkte in U , in denen alle partiellen Ableitungen der Ordnung höchstens k simultan verschwinden. Insbesondere ist also C_1 einfach die Menge der Punkte, in denen die Jacobi-Matrix die Nullmatrix ist. Wir erhalten eine absteigende Familie von Mengen

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$$

Der Beweis läuft nun in drei Schritten:

- (1) $f(C \setminus C_1)$ ist eine Nullmenge.
- (2) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist $f(C_i \setminus C_{i+1})$ eine Nullmenge.
- (3) Es gibt ein k derart, dass $f(C_k)$ eine Nullmenge ist.

Aus (1)–(3) folgt die Behauptung, denn

$$f(C) = f(C \setminus C_1) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} f(C_i \setminus C_{i+1}) \right) \cup \bigcap_{i=1}^{\infty} f(C_i).$$

Nach (3) ist die Menge auf der rechten Seite sicher eine Nullmenge (denn sie ist in $f(C_k)$ enthalten) und links steht eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen nach (1)–(2) und damit ebenfalls eine Nullmenge.

(1) Im Fall $n = 1$ ist $C_1 = C$ und wir sind fertig. Sei also $n \geq 2$ und sei $\bar{x} \in C \setminus C_1$. Wir konstruieren eine Umgebung V von \bar{x} in \mathbb{R}^m derart, dass $f(V \cap C)$ eine Nullmenge ist. Da $C \setminus C_1$ von abzählbar vielen solchen Umgebungen überdeckt wird (siehe Aufgabe 5.13), folgt dann, dass $f(C \setminus C_1)$ eine Nullmenge ist. Da \bar{x} nicht in C_1 liegt, gibt es eine partielle Ableitung erster Ordnung einer Komponente von f , die in \bar{x} nicht verschwindet. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass etwa $(\partial f_1 / \partial x_1)(\bar{x}) \neq 0$ gilt. Betrachte die Abbildung

$$h: U \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto (f_1(x), x_2, \dots, x_m).$$

Dann ist $h'(x)$ nicht-singulär, und nach dem Satz von der Umkehrfunktion bildet h eine Umgebung V von \bar{x} diffeomorph auf eine offene Teilmenge V' von \mathbb{R}^m ab. Betrachte die Komposition

$$g = f \circ h^{-1}: V' \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Da h' auf V invertierbar ist, ist die Menge C' der kritischen Punkte von g genau $h(V \cap C)$. Mithilfe von h haben wir nun die Umgebung V von x 'plattgemacht' und können die Induktionsvoraussetzung anwenden: Für jeden Punkt $(t, x_2, \dots, x_m) \in V'$ gilt $g(t, x_2, \dots, x_m) \in \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Mit anderen Worten, g bildet die Hyperebene mit erstem Eintrag t in \mathbb{R}^m in eine Hyperebene in \mathbb{R}^n ab. Es sei

$$\tilde{g}: (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \rightarrow \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$$

die Einschränkung von g , aufgefasst als Abbildung zwischen Teilmengen von \mathbb{R}^{m-1} und \mathbb{R}^{n-1} . Dabei ist ein Punkt $(t, y) \in \{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ genau dann ein kritischer Punkt von g , wenn er ein kritischer Punkt von \tilde{g} ist. Denn die Jacobi-Matrix hat die Gestalt

$$g'(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & \tilde{g}'(y) \end{bmatrix}$$

und daher gilt $\text{Rang}(g'(y)) < n$ genau dann, wenn $\text{Rang}(\tilde{g}'(y)) < n - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Menge der kritischen Werte von \tilde{g} eine Nullmenge in $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Da dies für jedes t gilt, folgt die Aussage.

(2) Dieser Beweisschritt geht im Prinzip ähnlich wie der erste. Für $\bar{x} \in C_i \setminus C_{i+1}$ gibt es eine partielle Ableitung der Ordnung $i + 1$, die in \bar{x} nicht verschwindet. Es gibt also Indizes r und s_1, \dots, s_{i+1} derart, dass die Funktion

$$w(x) = \partial^i f_r / \partial x_{s_1} \cdots \partial x_{s_i}$$

in \bar{x} verschwindet, nicht jedoch ihre partielle Ableitung $\partial w / \partial x_{s_{i+1}}$. Wir können ohne Einschränkung $s_{i+1} = 1$ annehmen und betrachten

$$h: U \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto (w(x), x_2, \dots, x_m).$$

Die Abbildung h bildet eine Umgebung V von \bar{x} diffeomorph auf eine offene Teilmenge V' von \mathbb{R}^m ab und überführt $C_k \cap V$ in eine Teilmenge von $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Betrachte wieder $g = f \circ h^{-1}: V' \rightarrow \mathbb{R}^n$ und sei

$$\tilde{g}: (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \rightarrow \mathbb{R}^n$$

die Einschränkung von g . Nach Induktionsannahme ist die Menge der kritischen Werte von \tilde{g} eine Nullmenge. Nun besteht $h(C_i \cap V)$ aus kritischen Punkten von \tilde{g} , da alle partiellen Ableitungen der Ordnung höchstens i verschwinden. Daher ist

$$\tilde{g}(h(C_i \cap V)) = f(C_i \cap V)$$

eine Nullmenge. Also besitzt jeder Punkt von $C_i \setminus C_{i+1}$ eine Umgebung V , für die $f(C_i \cap V)$ eine Nullmenge ist. Da $C_i \setminus C_{i+1}$ von abzählbar vielen solchen Umgebungen überdeckt wird, ist $f(C_i \setminus C_{i+1})$ eine Nullmenge.

(3) Wir bemerken zunächst, dass in Punkten von $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ alle Ableitungen von f verschwinden. Ist f analytisch, dann folgt, dass f lokal konstant ist. Da wir uns nur für den Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ interessieren, wird dieser dritte Beweisschritt für analytische Funktionen (also für jede anständige Funktion) nicht benötigt. Aber wer Sätze für alle glatten Funktionen formuliert, muss sie auch für solche beweisen...

Sei $W \subset \mathbb{R}^m$ ein Würfel mit Kantenlänge δ . Wir zeigen, dass $f(C_k \cap W)$ für hinreichend großes k eine Nullmenge ist (nämlich für jedes $k > m/n - 1$). Da wiederum C_k von abzählbar vielen solchen Würfeln überdeckt wird, folgt dann, dass $f(C_k)$ eine Nullmenge ist.

Sei $x \in C_k \cap W$ und $h \in \mathbb{R}^m$ mit $x + h \in W$. Da alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k in x verschwinden, folgt aus dem Satz von Taylor und der Kompaktheit von W , dass es eine Konstante c gibt (die nur von W und f abhängt) mit

$$\|f(x + h) - f(x)\| \leq c \|h\|^{k+1}.$$

Betrachte nun eine Unterteilung des Würfels W in r^m Teilwürfel mit Kantenlänge δ/r . Sei W' ein Teilwürfel, der einen Punkt $x \in C_k$ enthält. Dann hat jeder Punkt in W' eine Darstellung $x + h$ mit

$$\|h\| \leq \sqrt{m} \cdot \frac{\delta}{r}$$

Setze $a = 2c(\sqrt{m}\delta)^{k+1}$, dann folgt aus der obigen Abschätzung

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq c\|h\|^{k+1} \leq c\left(\sqrt{m}\frac{\delta}{r}\right)^{k+1} = \frac{a}{2r^{k+1}}.$$

Also ist $f(W')$ in einem Würfel mit Kantenlänge a/r^{k+1} und Mittelpunkt $f(x)$ enthalten. Somit ist $f(C_k \cap W)$ in einer Vereinigung von höchstens r^m solchen Würfeln enthalten, deren totales Volumen also durch

$$r^m \left(\frac{a}{r^{k+1}}\right)^n = a^n r^{m-(k+1)n}$$

abgeschätzt wird. Für $m - (k+1)n < 1$, also für $k > m/n - 1$ geht dieses Volumen für $r \rightarrow \infty$ offenbar gegen 0. Also ist $f(C_k \cap W)$ eine Nullmenge und der Beweis ist abgeschlossen. \square

Bemerkung 5.16. Der Beweis verwendet essentiell die Tatsache, dass f beliebig oft differenzierbar ist. Für C^k -Funktionen, $k < \infty$, ist die Aussage im allgemeinen falsch.

Übung 5.13. Zeige, dass jede offene Überdeckung einer Teilmenge von \mathbb{R}^n eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt. (*Hinweis:* Verwende, dass die Topologie von \mathbb{R}^n eine abzählbare Basis besitzt.)