Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Daniel Plaumann
Wintersemester 2012/2013

TORISCHE VARIETÄTEN

1. Übungsblatt
Besprechung am 8. November

1. Es sei $L \subset \mathbb{Z}^s$ ein Teilgitter. Zeige die Gleichheit von Idealen

$$\langle x^{\ell_+} - x^{\ell_-} \mid \ell \in L \rangle = \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L \rangle,$$

in $\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_s]$, wobei $\ell_+ = \sum_{\ell_i > 0} \ell_i e_i$ und $\ell_- = -\sum_{\ell_i < 0} \ell_i e_i$.

2. Es sei T_N ein Torus mit Charaktergitter M. Für jeden Punkt $t \in T_N$, definiere einen Homomorphismus $\varphi_t \colon M \to \mathbb{C}^*$ durch $\varphi_t(m) = \chi^m(t)$.
Zeige, dass die Abbildung $t \mapsto \varphi_t$ ein Isomorphismus

$$T_N \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$$

von Gruppen ist.

3. Es sei $T = (\mathbb{C}^*)^2$, mit zugehörigem Charaktergitter $M = \mathbb{Z}^2$, und seien

$$\mathcal{A}_1 = \{(3,0), (1,1), (0,3)\} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_2 = \{(2,0), (1,1), (1,3)\}.$$

Sei $Y_{\mathcal{A}_i} \subset \mathbb{C}^3$ die durch $\mathcal{A}_i$ bestimmte torische Varietät ($i = 1, 2$).

(a) Zeige, dass $Y_{\mathcal{A}_1} = Y_{\mathcal{A}_2}$ gilt und bestimme das Verschwindungsideal in $\mathbb{C}[x, y, z]$.
(b) Entscheide für $i = 1, 2$ jeweils, ob der Morphismus $\Phi_{\mathcal{A}_i} \colon \mathbb{C}^2 \to Y_{\mathcal{A}_i}$ surjektiv ist.