Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Daniel Plaumann
Wintersemester 2012/2013

TORISCHE VARIETÄTEN

2. Übungsblatt
Besprechung am 15. November

4. Es seien $m_1 = (1,0,0)$, $m_2 = (0,1,0)$, $m_3 = (0,0,1)$, $m_4 = (1,1,-1)$ und

$$C = \left\{ \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \lambda_3 m_3 + \lambda_4 m_4 \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Zeige, dass $S = C \cap \mathbb{Z}^3$ genau die von m_1, m_2, m_3, m_4 erzeugte affine Halbgruppe ist. Bestimme die zu S gehörige affine torische Varietät.

5. Zeige, dass $I = \langle x^2 - 1, xy - 1, yz - 1 \rangle$ das zu

$$L = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \mid a + b + c \equiv 0 \mod 2 \right\} \subset \mathbb{Z}^3$$

gehörige Gitterideal ist. Berechne die Primärzerlegung von I (per Hand oder z.B. in `Macaulay2`).

6. Es sei $L \subset \mathbb{Z}^s$ ein Gitter und I_L das zugehörige Gitterideal in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_s]$.
Zeige, dass I_L genau dann prim ist (also torisch), wenn $\mathbb{Z}^s / L$ torsionsfrei ist.