Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Daniel Plaumann
Wintersemester 2012/2013

TORISCHE VARIETÄTEN

3. Übungsblatt
Besprechung am 22. November

Es sei $N_{\mathbb{R}}$ ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum.

7. Es sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein abgeschlossener Kegel.

(a) Sei $u \in \sigma$. Zeige, dass $u \in \operatorname{Relint}(\sigma)$ genau dann gilt, wenn die Ungleichung $\langle m, u\rangle > 0$ für alle $m \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$ erfüllt ist.

(b) Es sei τ eine Seite von σ und $m \in \sigma^\vee$. Zeige:

(1) $m \in \tau^*$ genau dann, wenn $\tau \subset H_m \cap \sigma$.

(2) $m \in \operatorname{Relint}(\tau^*)$ genau dann, wenn $\tau = H_m \cap \sigma$.

8. Es sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein abgeschlossener Kegel. Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\{0\}$ ist eine Seite von σ.

(ii) σ enthält keinen linearen Unterraum von $N_{\mathbb{R}}$ außer $\{0\}$.

(iii) σ ist spitz, das heißt $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

(iv) $\dim(\sigma^\vee) = \dim N_{\mathbb{R}}$.

Folgere: Ist σ spitz mit nicht-leerem Inneren, dann gilt dasselbe für $\sigma^\vee$.

9. Es sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein polyedrischer Kegel.

(a) Zeige, dass σ eine eindeutig bestimmte minimale Seite besitzt. Diese bezeichnen wir mit W.

(b) Zeige $W = (\sigma^\vee)^\perp$.

(c) Zeige, dass W der größte in σ enthaltene Unterraum ist und damit $W = \sigma \cap (-\sigma)$.

(d) Sei $m \in \sigma^\vee$. Zeige, dass $m \in \operatorname{Relint}(\sigma^\vee)$ genau dann gilt, wenn $W = H_m \cap \sigma$.

(e) Zeige, dass $\overline{\sigma} = \sigma/W \subset N_{\mathbb{R}}/W$ ein spitzer polyedrischer Kegel im Quotientenraum $N_{\mathbb{R}}/W$ ist.